

**CENTRO UNIVERSITÁRIO DO LESTE DE MINAS GERAIS – UnilesteMG**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial**

**CLÁUDIO TEIXEIRA GOMES**

**PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA À OTIMIZAÇÃO DO PLANEJAMENTO DE  
PRODUÇÃO EM SIDERURGIA  
UM ESTUDO DE CASO – ARCELORMITTAL INOX BRASIL**

**CORONEL FABRICIANO - MG**

**2009**

**CLÁUDIO TEIXEIRA GOMES**

**PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA À OTIMIZAÇÃO DO PLANEJAMENTO DE  
PRODUÇÃO EM SIDERURGIA  
UM ESTUDO DE CASO – ARCELORMITTAL INOX BRASIL**

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial do Centro Universitário do Leste de Minas Gerais,, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Industrial.

Orientador: Prof. Dr. Dair José de Oliveira

**CORONEL FABRICIANO - MG  
2009**

**CLÁUDIO TEIXEIRA GOMES**

**PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA À OTIMIZAÇÃO DO PLANEJAMENTO DE  
PRODUÇÃO EM SIDERURGIA  
UM ESTUDO DE CASO – ARCELORMITTAL INOX BRASIL**

Dissertação de mestrado submetido à banca examinadora designada pelo conselho de Curso do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial, do Centro Universitário do Leste de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Industrial.

Aprovada em 29 de Outubro de 2009

Por:

---

Dair José de Oliveira, Dr.  
Prof. PPGE/Unileste-MG – Orientador.

---

Marcone Jamilson Freitas Souza, D. Sc.  
Prof. ICEB / UFOP

---

Marcelo Vieira Corrêa, Dr.  
Prof. PPGE/Unileste-MG

À Shirley, grande companheira e  
ao meu filho Gabriel

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Dair pela dedicação à orientação do meu trabalho;

À coordenação do curso de Mestrado pelo apoio para a realização desse trabalho;

Ao professor Esly pelo levantamento de preciosos artigos;

Ao Sérgio pelo incentivo a este plano de carreira;

À Ivana por acreditar e possibilitar a realização desse sonho;

À equipe de Planejamento da Produção, que especialmente me apoiaram com a utilização sistemática da ferramenta;

Ao Marco Tulho por compartilhar o desenvolvimento desde a primeira versão;

Ao Agnaldo e Eguinaldo pelas valiosas contribuições sobre os processos de planejamentos;

Ao Rafael que de uma maneira ou de outra colaborou nas traduções, e na elaboração dos exemplos e também pelo incentivo;

Aos colegas de mestrado, pelo apoio durante estes anos de convivência;

Aos colegas de trabalho, que tanto me incentivaram e apoiaram;

Aos meus pais, Francisco e Neuza, pela compreensão de minhas ausências;

Em especial, à minha esposa (Shirley) pelo carinho, compreensão e incentivo e ao meu filho (Gabriel) que um dia entenderá as minhas ausências ;

Àqueles que de uma maneira especial, em diferentes momentos da minha vida me Impulsionaram;

A Deus, por iluminar minha trajetória e por sustentar meu espírito na fé para superar os obstáculos encontrados.

“Feliz aquele que transfere o que sabe  
e aprende o que ensina”  
(Cora Coralina)

## RESUMO

O problema de balanceamento de linha em uma indústria pode ter uma configuração bastante complexa quando possui processos de produção diferentes, compartilhando os mesmos equipamentos. O planejamento da produção deve considerar a demanda de clientes, as necessidades de matérias-primas e estoques, as capacidades dos equipamentos, a possibilidade de falhas nos equipamentos e restrições nos processos de fabricação. O desafio é conceber um planejamento da produção que seja tanto realista quanto econômico. Este trabalho mostra o desenvolvimento da modelagem matemática do planejamento da produção aplicando a programação linear e a utilização de uma ferramenta de apoio à tomada de decisão na ArcelorMittal Inox Brasil para elaboração do Plano de Produção e Vendas. A filosofia adotada foi a de desenvolver uma ferramenta de simples manipulação e manutenção, com facilidade de divulgação e boa portabilidade. O modelo matemático desenvolvido, inicialmente utilizando a ferramenta de otimização Solver do Excel, visa o balanceamento da produção a partir do processamento da matéria prima até o atendimento ao pedido do cliente passando por todas as fases de produção. O processo de melhoria contínua da ferramenta resultou na rotina atual de modelagem matemática que reduziu o tempo de processamento do Plano de Produção e Vendas (PPV) com 2.328 variáveis e mais de 8.000 restrições para 40 segundos com a utilização da ferramenta de otimização Lpsolve e utilizando um computador desktop com Windows XP, um processador de 2.0 GHz e 1.47 GB de RAM. A grande facilidade tanto na manutenção quanto na operacionalização levou o modelo a se tornar uma ferramenta de uso constante na gerência de Planejamento, Programação e Controle da Produção.

Palavras-chave: Planejamento da produção. Programação linear. Lpsolve. Solver

## **ABSTRACT**

The line balancing problem in a steel plant that has a quite complex configuration when have different production processes and share the same equipments. The production planning must consider the customers' demand, the needs of raw materials and inventory, the equipment's capacity, the possibility of equipment failure and restrictions in manufacturing. The challenge is to conceive a production planning that is both realistic and economically feasible. This paper shows the evolution of mathematical modeling of production planning by applying the linear programming and using this tool to support decision making in ArcelorMittal Inox Brazil of production and sales plan generation. The adopted philosophy was to develop a tool with easy and simple manipulation and maintenance and also with ease of dissemination and good portability. The mathematical model, developed initially using the tool of the Excel Solver optimization, aims to balance the output from the processing of raw materials to supply the request of the client through all stages of production. The continuous improvement process of the tool resulted in the actual routine of mathematical modelling that reduced the processing time of production and sales plan generation (PPV) in 2,328 variables and more than 8,000 restricted to 40 seconds using the optimization tool lpsolve and a desktop computer with Windows XP, processor of 2.0 GHz and 1.47 GB of RAM. The great ease to maintain and to operate the model made it to become a frequent used tool Production management, planning and controlling.

Key words: Production planning. Linear programming. Lpsolve. Solver



## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 Fluxo de produção da ArcelorMittal Inox Brasil – AMIB .....	48
Figura 4.2 Foto da matéria prima (pelota) sendo retirada da pilha para abastecimento do Alto Forno .....	49
Figura 4.3 Foto do processo de carga de gusa no convertedor MRP na Aciaria.....	49
Figura 4.4 Foto da placa já reaquecida na entrada do laminador desbastador rougher.....	50
Figura 4.5 Foto da bobina laminada a quente preta (BQP) resultante da laminação da placa no laminador a quente steckel.....	50
Figura 4.6 Foto das bobinas sendo processadas em bateladas nos fornos de recozimento em caixa.....	51
Figura 4.7 Foto da bobina sendo recortada em tiras na tesoura transversal.....	52
Figura 4.8 Foto do Produto Acabado (PA) sendo expedido para o cliente.....	52
Figura 5. 1 Fluxo de produção simplificado (Exemplo 1) .....	58
Figura 5. 2 Planilha com os produtos P1 e P2 nos equipamentos E1 e E2 (Exemplo 1) .....	59
Figura 5. 3 Planilha da produção no Exemplo 2 .....	60
Figura 5.4 Planilha da produção no Exemplo 3 .....	62
Figura 5.5 Foto da placa posicionada para início de laminação a quente .....	64
Figura 5.6 Planilha da produção no Exemplo 4 .....	65
Figura 5.7 Planilha da produção no Exemplo 5 .....	67
Figura 5.8 Aplicação do rendimento no fluxo de produção do produto P1 .....	68
Figura 5.9 Planilha da produção no Exemplo 6 .....	69
Figura 5.10 Foto do estoque de produto em elaboração de bobinas laminadas a frio .....	72
Figura 5.11 Fluxo de produção com estoque PE e PA .....	73
Figura 5.12 Planilha da produção no Exemplo 7 .....	74
Figura 5.13 Caixa de diálogo da ferramenta Solver do Excel.....	75
Figura 5.14 Planilha da produção no Exemplo 8 .....	77
Figura 5.15 Planejamento anual em multiperíodos .....	79
Figura 5.16 Planilha de Planejamento em Multiperíodos .....	80
Figura 5.17 a) Estoque de Produto em Elaboração e b) Estoque de Produto Acabado.....	82
Figura 5.18 Fluxo de execução da otimização do PPV com a rotina Ipsolve .....	83
Figura 5.19 Planilha de interface do modelo matemático do Plano de Produção .....	84

Figura 5.20 Resumo da entrega de produto acabado à expedição no Plano de Produção .....	85
Figura 5.21 Taxa de ocupação dos equipamentos da linha de produção para o PPV Proposto ...	85
Figura 5.22 Desempenho do modelo em lpsolve .....	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Setores, objetivos e estratégias envolvendo Pesquisa Operacional .....	37
---	----

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

AG – Algoritmo Genético

Aimms – Advanced Integrated Multidimensional Modeling Software

AMIB – ArcelorMittal Inox Brasil

AMPL – A Mathematical Programming Language

AODL – Argon Oxigen Descarburization with Lance

ASTM – American Society for Testing and Materials

BQP – Bobina Laminada a Quente Preta

DLL – Dynamic-link Library

GALBP – General Assembly Line Balancing

GNO – Grão Não Orientado

GO – Grão Orientado

IF – Índice de Funcionamento

LI – Limite Inferior

LS – Limite Superior

LTQ – Laminação de Tiras a Quente

Matlab – Matrix Laboratory

MPL – Mathematical Programming Language

MRPL – Metal Refining Process with Lance

OPL – Optimization Programming Language

PA – Produto Acabado

PE – Produto em Elaboração

PPCP – Planejamento, Programação e Controle da Produção

PPL – Problema de Programação Linear.

PPV – Plano de Produção e Vendas.

SALBP– Simple Assembly Line Balancing

TL – Tesoura Longitudinal

TT – Tesoura Transversal

VOD – Vaccum Oxygen Descarburization

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Problema de pesquisa.....</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Questões de pesquisa.....</b>	<b>19</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos.....</b>	<b>19</b>
<b>1.3.1</b>	<b><i>Geral.....</i></b>	<b>19</b>
<b>1.3.2</b>	<b><i>Específicos.....</i></b>	<b>19</b>
<b>1.4</b>	<b>Pressupostos .....</b>	<b>20</b>
<b>1.5</b>	<b>Justificativa para estudo do tema .....</b>	<b>20</b>
<b>1.6</b>	<b>Limitações do trabalho.....</b>	<b>21</b>
<b>1.7</b>	<b>Estrutura do trabalho .....</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>PROGRAMAÇÃO LINEAR .....</b>	<b>22</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelagem de problema de programação linear.....</b>	<b>23</b>
<b>2.2</b>	<b>Método Simplex .....</b>	<b>27</b>
<b>2.3</b>	<b>Método Simplex Revisado.....</b>	<b>29</b>
<b>2.4</b>	<b>Eficiência do algoritmo Simplex.....</b>	<b>32</b>
<b>3</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DO PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO .....</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Plano de produção e vendas .....</b>	<b>33</b>
<b>3.2</b>	<b>Função objetivo para otimização .....</b>	<b>36</b>
<b>3.3</b>	<b>Balanceamento de linha no planejamento da produção .....</b>	<b>37</b>
<b>3.4</b>	<b>Modelagem do estoque .....</b>	<b>44</b>
<b>4</b>	<b>DESCRIÇÃO DO PROCESSO .....</b>	<b>46</b>

4.1	Processo produtivo da ArcelorMittal Inox Brasil .....	46
4.2	Produtos da ArcelorMittal Inox Brasil .....	53
5	MODELAGEM DO PLANO DE PRODUÇÃO E VENDAS.....	56
5.1	Função objetivo .....	57
5.2	Restrições relacionadas ao produto .....	60
5.3	Restrições de capacidade dos equipamentos .....	63
5.4	Rendimento físico do produto .....	67
5.5	Modelagem de estoque intermediário.....	72
5.6	Modelagem em multiperíodos .....	78
5.7	Processamento do plano de produção .....	82
5.8	Análise dos resultados.....	87
6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	90
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	92
	APÊNDICE A – ESTRUTURA DO OTIMIZADOR.....	97
	APÊNDICE B – LPSOLVE 5.5.....	100
	APÊNDICE C – CONCEITOS GEOMÉTRICOS DE MODELOS LINEARES.....	109

## 1 INTRODUÇÃO

A capacidade produtiva dos ativos (equipamentos e estoques) é muito importante na gestão de uma empresa, pela oferta ao mercado, pelo custo do estoque de alto valor agregado, pela manutenção do processo produtivo, pela entrega de valor ao cliente e, principalmente, pela margem de contribuição resultante. A gestão da capacidade produtiva dos ativos constitui um componente importante da administração do portfólio da empresa, principalmente quando possui limitações de capacidade em alguns equipamentos como é o caso de grande parte das empresas (MARTINS e LAUGENI, 2005).

Frente a este contexto, a otimização do planejamento de produção torna-se cada vez mais importante para as organizações. A melhor utilização dos equipamentos, menores níveis de estoques, menores custos de produção, menor tempo de produção (*lead-time*) e garantia do nível de serviço são estratégias que muitas vezes caminham em sentidos opostos.

A maioria das empresas tem uma variedade de produtos que chegam muitas vezes à casa de centenas. Dessa forma, torna-se muito difícil, senão impossível, efetuar uma previsão de demanda para cada um dos produtos fabricados. Deve-se definir uma metodologia para agrupar esses produtos e, conseqüentemente, as diferentes demandas em um conjunto menor, que seja representativa do todo. A demanda prevista para esse grupo ou família de produtos é denominada demanda agregada (MARTINS e LAUGENI, 2005).

Outra necessidade das empresas, que reflete diretamente no custo total, é o balanceamento do fluxo produtivo. No caso da indústria siderúrgica, os custos dos ativos são extremamente altos. Uma forma de diluir estes custos é manter a fábrica na sua capacidade máxima (SLACK et al., 2002).

A literatura mostra abordagens de programação linear para o problema de mistura com aplicação geral (HILLIER e LIEBERMAN, 2006), específico para siderurgia, sem considerar os estoques (CHEN e WANG, 1997), e considerando os estoques de produtos acabados (MOREIRA Jr, 2009).

Donato et al. (2008) propõem a utilização de um modelo de programação linear para balancear as variáveis mais críticas no planejamento de médio prazo, de modo a se desenvolver um plano de produção que seja viável e que maximize o resultado financeiro da empresa. Os autores ilustram a eficiência do modelo, utilizando-se como base o processo produtivo de uma indústria brasileira do setor metal-mecânico.

Dubois e Oliff (1991), apud Moreira Jr (2009), relatam pesquisa realizada com 55 empresas do meio-leste dos Estados Unidos da América na tentativa de entender melhor a distância entre a literatura e as aplicações industriais. Os resultados indicaram uma significativa diferença entre as estratégias usadas para adaptar o processo de produção às flutuações da demanda, no curto e no longo prazo. A conclusão dos autores é de que, pelas respostas recebidas na pesquisa, poucas empresas demonstram condições de utilizar os modelos de planejamento encontrados na literatura, e que essas têm feito consideráveis esforços para obter informações de custos requeridas pelos modelos. Mas o mais notável da pesquisa é que, indiferente do nível das vendas, as empresas confiam em técnicas pouco sofisticadas para tomar as decisões relativas ao Plano de Produção.

Affonso Neto (2006) relata que a intuição pura está de um lado do espectro do processo de tomada de decisões e do outro lado está a análise absolutamente racional das alternativas. Esses dois extremos têm uma característica em comum: não existem na vida real. O fato de haver limitações não significa que não se deva tentar tomar decisões.

O modelo de planejamento estratégico tem como objetivo apoiar as decisões referentes à expansão da capacidade produtiva, avaliar os impactos econômicos e financeiros dessa instalação, quantificar a capacidade, definir a localização e data da implantação, escolher as estratégias operacionais e fazer a avaliação da atratividade dos mercados para definição das estratégias de marketing.

Affonso Neto (2006) define a tomada de decisão como uma atividade de escolha entre alternativas disponíveis, inerente ao processo de planejamento. Segundo o mesmo autor, o processo de tomada de decisão é uma tentativa racional de alcançar os objetivos e se desenvolve nas seguintes etapas:



- i) identificação do problema;
- ii) identificação de alternativas para a solução do problema;
- iii) análise das alternativas e
- iv) seleção da alternativa mais adequada. A alternativa será definida pela política adotada pela empresa.

A decisão central do Plano de Produção e Vendas é a escolha da mistura de produtos que leve ao melhor resultado financeiro (MOREIRA Jr, 2009).

Para Moreira Jr (2009), deve-se utilizar como critério a otimização da margem de contribuição dos produtos. A margem de contribuição é definida como a diferença entre o preço líquido de venda e o custo variável do produto. O preço é obtido descontando-se, além de todos os impostos, todos os custos de logística para entrega ao cliente. A utilização deste conceito preconiza que a máxima margem de contribuição levará ao maior lucro, visto que todos os demais custos, os fixos, existem independentes de qual seja a mistura.

A modelagem matemática, baseada em programação linear, pode balancear a capacidade dos equipamentos, os níveis de estoques, os custos de produção, o tempo de entrega dos pedidos e garantia de nível de serviço desejado. Mesmo que sejam variáveis que caminham em sentidos opostos. O grau de importância de cada uma dessas variáveis se dá em função da dinâmica imposta pelo mercado consumidor e/ou pelas alterações no fluxo produtivo devido a implantação de novos equipamentos ou evolução no processo, compondo, dessa forma, um cenário de planejamento. O modelo apresenta a solução ótima de produção que maximiza o lucro para cada um dos cenários, cabendo aos planejadores e gestores definir qual cenário efetivará o plano de produção.

Haddad et al. (2007) desenvolveram modelos de otimização para o planejamento da produção, ambos baseados na Teoria de Grafos. Levando-se em conta tanto a disponibilidade na empresa, quanto a familiaridade do usuário, foi explorado o uso de planilha eletrônica no desenvolvimento de um ambiente padrão tanto na modelagem quanto na apresentação dos resultados. Buttrey (2005) demonstra como utilizar a ferramenta programação linear, Ipsolve, com uma biblioteca do Excel. Possibilitando, assim, resolver problemas de grandes dimensões.

O presente trabalho utiliza para estudo de caso a indústria siderúrgica ArcelorMittal Inox Brasil. A siderúrgica em análise possui uma capacidade produtiva limitada e uma carteira de produtos com margens de contribuição variadas, que deve ser distribuída mensalmente, da melhor forma possível, ao longo de um ano. Essa distribuição é chamada de Plano de Produção e Vendas (PPV). O PPV busca maximizar o lucro em função da margem de contribuição de cada produto e tem como restrição a capacidade produtiva dos equipamentos envolvidos.

Propõe-se, neste trabalho, uma modelagem para o Plano de Produção e Vendas da ArcelorMittal Inox Brasil na forma clássica da programação linear, utilizando-se da planilha eletrônica para a solução do problema modelado. O problema se constitui em definir a melhor mistura de produção com agregação de produtos e considerando vários períodos de planejamento. Diferentemente das abordagens encontradas na literatura, considerou-se a existência de estoques em todas as fases de produção e a transferência dos mesmos entre os vários períodos de planejamento, tanto para produto acabado quanto para produto em elaboração. O balanceamento considera também vários produtos em uma mesma linha orientados pelo resultado financeiro da empresa, ou seja, considera a margem do produto, o custo do estoque e os custos de cada fase de produção.

A abordagem determinística, utilizando programação linear, mostrou-se bastante eficiente na implementação do modelo em planilha eletrônica com a biblioteca Ipsolve. Esse modelo, de dimensão de elevada (2.328 variáveis e 8.280 restrições), apresenta-se de forma compacta e com grande facilidade de operacionalização. Outra característica é a flexibilidade do modelo para acompanhar a dinâmica imposta pelo ambiente de planejamento.

## **1.1 Problema de pesquisa**

Os esforços da área comercial são para desenvolver várias modalidades de atendimento que agreguem maior valor aos produtos, além buscar novos mercados para os produtos. Desses esforços de venda surge a demanda comercial para a empresa.

A otimização do planejamento de produção se faz necessária na busca da melhor margem resultante, considerando como restritivo a capacidade produtiva. Dessa forma, ocorrem as interações entre a área comercial e industrial da empresa. A primeira buscando enobrecer o produto e buscando maior escala de venda e a segunda ampliando sua capacidade de produção e reduzindo continuamente seus custos de fabricação. A soma dos esforços das duas áreas deve ser no sentido de maiores lucros para a empresa.

## **1.2 Questões de pesquisa**

As questões de pesquisa que norteiam este estudo são as seguintes:

- a) qual portfólio a empresa deve buscar para maximizar o seu lucro?
- b) qual o nível de estoque necessário e suficiente?
- c) onde estão os limitadores de capacidade e o quê deve ser melhorado?
- d) qual o impacto do custo por fase no lucro total da empresa?
- e) como distribuir a produção ao longo do período de planejamento?
- f) qual o melhor cenário de produção?

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Geral**

Desenvolver uma ferramenta de apoio à tomada de decisão para a otimização do planejamento de produção em siderurgia.

### **1.3.2 Específicos**

- a) analisar os processos de planejamento e controle da produção da empresa;
- b) consolidar os fluxos desses processos desde a entrada de pedidos, confirmação, liberação de produção e análise de capacidades;

- c) identificar uma abordagem conceitual que represente a atual sistemática de planejamento e controle da produção;
- d) identificar as metodologias mais adequadas ao negócio da organização;
- e) propor alterações nos processos atuais, indicando os ganhos de aumento de margem a serem alcançados e demonstrar o impacto nas demais variáveis da operação logística da empresa;
- f) propor modelos que apóiem a tomada de decisão no plano de produção anual da empresa.

#### **1.4 Pressupostos**

Com base na revisão da literatura e resultados de pesquisas na área de Modelagem e Otimização, um dos pressupostos é que as ferramentas de otimização são de grande relevância para a tomada de decisão na construção do Plano de Produção e Vendas (PPV) na indústria siderúrgica. Outro pressuposto é que modelos de otimização da capacidade produtiva podem ser simplificados e desenvolvidos em plataformas amigáveis, passando a ser usado rotineiramente no ambiente de planejamento.

#### **1.5 Justificativa para estudo do tema**

Uma das principais razões da baixa utilização de ferramentas de otimização para apoio a tomada de decisão na elaboração do Plano de Produção e Vendas (PPV) é o fato de se considerar complexa a modelagem matemática envolvida. Outra, em menor escala, é o tempo de resposta dos modelos que impossibilita a busca por melhores soluções em uma reunião executiva, por exemplo.

## **1.6 Limitações do trabalho**

Para a modelagem utilizando programação linear, considerou-se que todas as variáveis envolvidas eram contínuas e assumem qualquer valor real maior ou igual a zero. Porém esta aproximação só é possível devido à escala de produção do período de planejamento ser maior que o valor unitário de produção (por exemplo, uma campanha de 1.000 t de um determinado aço e a sua produção unitária de 80 t) admitindo uma aproximação. Caso contrário, seria necessária uma abordagem de programação inteira.

## **1.7 Estrutura do trabalho**

O restante deste texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 é apresentada a modelagem matemática, utilizando técnicas de programação linear, como ferramentas de apoio à tomada de decisão. São apresentados de forma breve alguns métodos de solução, como por exemplo, Simplex e Simplex Revisado.

O Capítulo 3 mostra o contexto do balanceamento de linha como fator importante na tomada de decisão. Cita algumas abordagens do problema de balanceamento de linha da literatura e a utilização de ferramentas de apoio a decisão orientada pela Pesquisa Operacional. No Capítulo 4 são apresentados os processos produtivos de uma siderúrgica e os produtos e equipamentos utilizados no planejamento.

O Capítulo 5 apresenta, em detalhes, a modelagem matemática do Plano de Produção e Vendas da siderúrgica estudada (função objetivo, variáveis e restrições). Discute-se a modelagem do estoque de produtos em elaboração e acabados no planejamento mensal e anual. Apresenta-se um modelo matemático que é implementado em planilha eletrônica e a sua interface com uma rotina especialista de otimização denominada Ipsolve. Discute-se o desempenho da ferramenta e analisam-se os resultados obtidos.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

A história e evolução da programação linear registra a convivência com situações que estimulam a procura de métodos para otimizar o aproveitamento de recursos escassos, visando compartilhá-los entre atividades competitivas (GOLDBARG e LUNA, 2005). Em 1939, o matemático e economista soviético Leonid Kantorovitch formulou e resolveu um Problema de Programação Linear (PPL) para organização e planejamento da produção (LINS e CALÔBA, 2006).

O problema utilizando programação linear também foi formalizado por George B. Dantzig em 1947 que, em seguida, desenvolveu o “Método Simplex” para resolvê-lo (DANTZIG, 1963). Desde então, um grande número de pesquisadores têm contribuído para o campo da programação linear de diferentes maneiras, incluindo desenvolvimentos teóricos, aspectos computacionais e novas aplicações (GOLDBARG e LUNA, 2005).

Karmarkar (1984) publicou o Método de Pontos Interiores, capaz de encontrar uma solução ótima em tempo polinomial<sup>1</sup>, para o pior caso. Além disso, o autor afirmou que seu método era mais rápido do que o método simplex (em alguns casos até 50 vezes), o que estimulou uma avalanche de pesquisa na área de otimização linear, incluindo-se questões desafiadoras sobre a eficiência computacional de métodos do tipo simplex.

Atualmente, problemas com milhares de restrições e variáveis são resolvidos em computadores pessoais e destaca-se a incorporação do Solver ao Microsoft Excel que aumentou a disseminação da Programação Linear e da Pesquisa Operacional (LINS; CALÔBA, 2006).

Pesquisa Operacional é o nome dado a um conjunto de modelos e algoritmos destinados a determinar o melhor curso das ações que visam garantir o funcionamento ótimo de sistemas, sob restrições de recursos. Ao mencionar o termo algoritmo, destaca-se a necessidade do uso intensivo de meios computacionais para o processamento automático dos procedimentos de otimização (DANTZIG, 1963).

---

<sup>1</sup> Um algoritmo é considerado de tempo polinomial quando o tempo necessário para resolver qualquer problema de programação linear pode ser limitado acima por uma função polinomial do tamanho do problema (HILLIER e LIEBERMAN, 2006).

Os esforços de guerra formaram grupos multidisciplinares de cientistas que se dedicaram à solução de questões estratégicas, táticas e logísticas, ligadas a atividades bélicas (WAGNER, 1986). Nesta época, já se sabia que o planejamento e a coordenação entre vários projetos e a utilização eficiente de recursos escassos eram essenciais (LINS e CALÔBA, 2006).

Terminada a guerra, percebeu-se a possibilidade de aplicar um enfoque semelhante a problemas do cotidiano. Setores produtivos da economia pública e privada começavam, nos centros mais avançados do mundo, a incorporar os métodos desenvolvidos para problemas de guerra no elenco daqueles utilizados na solução de problemas de processos industriais, aí incluindo questões de balanceamento do fluxo produtivo (TAHA, 2008).

As grandes organizações, como as companhias de petróleo, foram as primeiras a adotar o novo conjunto de metodologias para a resolução de seus problemas de decisão, crescendo o uso da programação linear no planejamento da produção em larga escala. O sucesso dos métodos justificava pesados investimentos pelas corporações de grande porte, na busca de novos processos. Mais tarde, pequenas companhias puderam usufruir do conhecimento acumulado sem investir pesadamente em pesquisa (HILLIER e LIEBERMAN, 2006).

## **2.1 Modelagem de problema de programação linear**

O Problema de Programação Linear (PPL) é um modelo matemático de otimização com função objetivo e restrições lineares, e variáveis contínuas. A vantagem desse modelo está na extraordinária eficiência dos algoritmos de solução hoje existentes. Esses algoritmos podem ser facilmente implementado até mesmo por meio de planilhas e com auxílio de microcomputadores pessoais (GOLDBARG e LUNA, 2005).

Do ponto de vista de modelagem, as propriedades matemáticas de um modelo de programação linear implicam que certas hipóteses têm de ser satisfeitas em relação às atividades e aos dados do problema que está sendo modelado. Incluem-se as

hipóteses sobre o efeito de se variar os níveis de atividades (HILLIER e LIEBERMAN, 2006). Assim o modelo deverá atender às seguintes hipóteses:

- 1) Hipótese de proporcionalidade;
- 2) Hipótese de não negatividade;
- 3) Hipótese de aditividade;
- 4) Hipótese de separabilidade

Segundo Hillier e Lieberman (2006), a hipótese de proporcionalidade se refere tanto à função objetivo quanto às restrições e a quantidade de recurso consumida por uma dada atividade deve ser *proporcional* ao nível dessa atividade na solução final do problema. Além disso, o custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade.

Para atender a hipótese de não negatividade, deve ser sempre possível desenvolver dada atividade em qualquer nível *não negativo* e qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado.

O custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade (hipótese de aditividade) e pode-se identificar de forma *separada* o custo (ou consumo de recursos) específico das operações de cada atividade (hipótese de separabilidade).

A programação linear, como instrumento de planejamento e gestão ótima de sistemas é o tópico mais difundido e utilizado da pesquisa operacional, introduzindo uma inovação ao permitir o aumento da produtividade sob as tecnologias existentes pelo aprimoramento da organização dos processos produtivos (GOLDBARG e LUNA, 2005).

A modelagem de um Problema de Programação Linear pode ser escrita na seguinte forma padrão (GOLDBARG e LUNA, 2005; DANTZIG, 1963):



$$\text{Otimizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

em que:

$x$  é o vetor de variáveis com  $n$  componentes, sendo a variável  $x_j$  poder ser, por exemplo, a quantidade do produto  $j$  entregue à expedição;

$c$  é o vetor de coeficientes da função objetivo  $z$  com  $n$  componentes;  $c_j$  pode ser, por exemplo, o coeficiente de lucro unitário do produto  $j$ ;

$A$  é a matriz de coeficientes tecnológicos com dimensão  $m \times n$ , e o elemento  $a_{ij}$  pode ser, por exemplo, o tempo que uma unidade do produto  $j$  ocupa no equipamento  $i$ ;

$b$  é o vetor de quantidade de recurso disponível com  $m$  componentes; o elemento  $b_i$  pode ser, por exemplo, a disponibilidade de tempo do equipamento  $i$ .

$n$  é o número de variáveis

$m$  é o número de restrições

O termo otimizar na equação (1) representa a possibilidade de maximizar ou minimizar a função objetivo  $z$ . Na modelagem proposta para otimização do Plano de Produção e Vendas (PPV) a função objetivo será maximizar a margem de contribuição no período de um ano com subdivisão mensal.

Um problema de otimização com restrições pode ter:

- i) nenhuma solução viável, isto é, pode não haver valores para todos  $x_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , que satisfaçam a todas as restrições simultaneamente;
- ii) uma única solução viável ótima; ou
- iii) infinitas soluções viáveis ótimas; ou

O processo de organização de um modelo de Programação Linear pode ser decomposto nas seguintes etapas (GOLDBARG e LUNA, 2005):

1. Definir as atividades - Após a análise do problema, as atividades que o compõem são definidas, além de adotar uma unidade de medida associada a cada atividade.
2. Definir os recursos - Nesta etapa são determinados os recursos que estão sendo usados e produzidos em cada atividade, considerando os insumos disponíveis.
3. Calcular os coeficientes de insumo/produção - Estabelecer como as atividades e os recursos estão relacionados em termos de recursos necessários por unidade de atividade produzida.
4. Determinar as condições externas - Considerando que os recursos são limitados, cumpre determinar a quantidade de cada recurso disponível para o processo modelado.
5. Formalizar o modelo - Consiste em associar quantidades não negativas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a cada uma das atividades, escrever as equações de balanceamento e indicar o uso de cada recurso.

Taha (2008) ressalta que, na prática, quando os modelos típicos de programação linear envolvem milhares de variáveis e restrições, o único modo viável de resolver tais modelos é usar o computador.

Vollmann et al. (2006) afirmam que, embora as abordagens matemáticas sejam substancialmente mais sofisticadas do que as encontradas na prática, na maioria das firmas, as planilhas eletrônicas são mais usadas para elaborar os planos de produção. Justificam que este fato é devido à falta de familiaridade das equipes gerenciais com ferramentas de otimização, pois as análises que servem de base para os modelos quantitativos são de difícil compreensão. Recomendam que esta lógica deva ser transparente para garantir a aceitação, principalmente, para os modelos de planejamento da produção.

E existem várias linguagens algébricas de modelagem que oferecem grande flexibilidade na modelagem e execução de modelos grandes e complexos. Entre esses pacotes comerciais estão: AMPL, Aimms, Gams, Lingo, MPL, OPL Studio e Xpress-

Mosel. E, segundo Taha (2008), para problemas pequenos, o Excel Solver é particularmente atraente para usuários de planilhas. O Solver pode ser ativado no Excel na barra de ferramentas Suplementos. Detalhes de modelagem de programação linear utilizando a ferramenta Solver do Excel podem ser encontrados em Lachtermacher (2007).

Com a ligação via código de programação (VBA - Visual Basic Applications) é possível chamar a partir do Excel a biblioteca Ipsolve (BUTTREY, 2005), software de otimização com distribuição livre, para encontrar soluções para problemas maiores. Isso permite aos usuários resolver problemas de programação linear, inteira ou mista de tamanho moderado à grande<sup>2</sup>, sem nenhum custo adicional com *software*.

## 2.2 Método Simplex

O problema de programação linear descrito na formulação algébrica geral com a equação (1) em que a função objetivo seja a maximização, pode ser desenvolvido na seguinte forma canônica (GOLDBARG e LUNA, 2005 e DANTZIG, 1963):

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad z = cx \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad Ax \leq b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

em que  $x$  é um vetor de tamanho  $n$  representando as variáveis,  $A$  é uma matriz  $(m \times n)$  que representa os coeficientes das restrições,  $b$  é um vetor coluna que representa as restrições e  $c$  é um vetor de tamanho  $n$  que representa os coeficientes da função objetivo.

---

<sup>2</sup> O solver original do Excel pode modelar até 200 variáveis ( help on-line Excel 2003) e o Solver Premium fornecido pela Fontline Systems V3.5 pode modelar até 10.000 variáveis. O Ipsolve V5.5 não apresenta limitação de número de variáveis.

Uma *solução básica* de  $Ax = b$  é determinada igualando  $n - m$  variáveis a zero e depois resolvendo as  $m$  equações resultantes nas  $m$  incógnitas restantes, considerando que a solução resultante seja única (TAHA, 2008).

As soluções básicas de  $Ax = b$  contêm todas as informações para se determinar a solução ótima do problema de programação linear (TAHA, 2008). No Apêndice C são apresentados alguns conceitos geométricos de modelos lineares utilizados na solução de problemas de programação linear

Para formalizar a definição de uma solução básica, o sistema  $Ax = b$  pode ser expresso em forma de vetor da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^n P_j x_j = b \quad (3)$$

O vetor  $P_j$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ . Diz-se que um subconjunto de  $m$  vetores forma uma *base*,  $B$ , se, e somente se, os  $m$  vetores selecionados forem *linearmente independentes*. Nesse caso, a matriz  $B$  é *não singular*. Se  $X_B$  é um conjunto de  $m$  variáveis associadas com os vetores da matriz não singular  $B$ , então  $X_B$  deve ser uma solução básica. Nesse caso, tem-se:

$$BX_B = b \quad (4)$$

Dada a inversa  $B^{-1}$  de  $B$ , obtém-se a solução básica correspondente:

$$X_B = B^{-1}b \quad (5)$$

Se  $B^{-1}b \geq 0$ , então  $X_B$  é viável (TAHA, 2008). A definição considera que as  $n - m$  variáveis restantes são *não básicas* com valor zero.

Segundo Wagner (1986), não é possível retornar a qualquer solução básica anterior, dada a suposição de que a função objetivo melhora a cada iteração. E o número máximo e finito de soluções básicas viáveis e inviáveis de um sistema com  $m$  equações e  $n$  incógnitas é dado por:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

A solução ótima do problema de programação linear está sempre associada a uma solução básica viável. A busca da solução ótima pelo método simplex começa com a seleção de uma base viável,  $B$ , e continua passando para outras bases,  $B_{next}$ , que resulte em um valor melhor na função objetivo. De forma iterativa, a certa altura a base ótima é alcançada.

### 2.3 Método Simplex Revisado

Em 1952, Charnes e Memke desenvolveram o simplex revisado (LINS e CALÔBA, 2006). As etapas iterativas do método simplex *revisado* são as mesmas do método simplex. A principal diferença é que os cálculos do método revisado são baseados em manipulações matriciais em vez de operações algébricas entre linhas.

A utilização da álgebra matricial reduz o efeito adverso do erro de arredondamento da máquina por meio do controle da precisão no cálculo do  $B^{-1}$ . Este resultado decorre porque a tabela simplex inteira pode ser calculada com base nos dados originais e da matriz inversa  $B^{-1}$  atual. Enquanto o método simplex, cada iteração é processa todos os dados da iteração anterior, o que tende a piorar o problema do erro de arredondamento.

*Condição de otimalidade.* Pela equação (5), um aumento de  $x_j$  não básico acima do seu valor zero atual melhorará o valor de  $z$  em relação a seu valor atual ( $= c_B B^{-1} b$ ) só se  $z_j - c_j$  for estritamente negativo no caso de maximização e estritamente positivo no caso de minimização. Caso contrário,  $x_j$  não pode melhorar a solução e deve permanecer não básica no nível zero. Embora qualquer variável não básica que satisfaça a condição dada possa ser escolhida para melhorar a solução, o método simplex usa a *condição de otimalidade* que recomenda a seleção da *variável que entra* como a que tiver  $z_j - c_j$  mais negativo em caso de maximização.

*Condição de viabilidade.* A determinação do vetor que sai é baseada no exame da equação de restrição associada com a  $i$ -ésima variável básica. Especificamente, tem-se:

$$(X_B)_i + \sum_{j=1}^n (B^{-1}P_j)_i x_j = (B^{-1}b)_i$$

Quando o vetor  $P_j$  é selecionado pela condição de otimalidade para entrar na base, sua variável associada  $x_j$  aumentará acima do nível zero. Ao mesmo tempo, todas as variáveis não básicas restantes permanecem no nível zero. Portanto, a  $i$ -ésima equação de restrições se reduz a:

$$(X_B)_i = (B^{-1}b)_i - (B^{-1}P_j)_i x_j$$

A equação mostra que, se  $(B^{-1}P_j)_i > 0$ , um aumento de  $x_j$  pode fazer com que  $(X_B)_i$  se torne negativo, o que viola a condição de não-negatividade para todo  $i$ . Assim, tem-se:

$$(B^{-1}b)_i - (B^{-1}P_j)_i x_j \geq 0 \text{ para todo } i$$

Essa condição resulta no valor máximo da variável  $x_j$  que entra como:

$$x_j = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_j)_i} \mid (B^{-1}P_j)_i > 0 \right\}$$

A variável básica responsável por produzir a razão mínima sai da solução básica para se tornar não básica no nível zero.

*Algoritmo simplex revisado.* O cálculo do método simplex revisado pode ser realizado com as seguintes etapas:

Etapa 0. Construa uma solução básica inicial viável e sejam  $B$  e  $c_B$  sua base associada e seu vetor de coeficientes da função objetivo, respectivamente.

Etapa 1. Calcule a inversa  $B^{-1}$ .

Etapa 2. Para cada variável  $x_j$  não básica, calcule

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} P_j - c_j$$

Se  $z_j - c_j \geq 0$  (problema de maximização) para toda  $x_j$  não básica, pare; a solução ótima é dada por

$$x_B = B^{-1}b, \quad z = c_B x_B$$

Caso contrário, aplique a *condição de otimidade* e determine a variável  $x_j$  que *entra na base* como a variável não básica que tenha  $z_j - c_j$  mais negativo no caso de maximização.

Etapa 3. Calcule  $B^{-1}P_j$ . Se todos os elementos de  $B^{-1}P_j$  forem negativos ou zero, **pare**. O problema não tem nenhuma solução limitada. Caso contrário, calcule  $B^{-1}b$ . Então, para todos os elementos estritamente positivos de  $B^{-1}P_j$ , determine as razões definidas pela *condição de viabilidade*. A variável básica  $x_j$  associada à menor razão é a variável que sai da base.

Etapa 4. De acordo com a base atual  $B$ , forme uma nova base substituindo o vetor que sai da base,  $P_i$ , pelo vetor que entra na base,  $P_j$ . Vá para a etapa 1 e inicie uma nova iteração.

Alguns métodos não recalculam completamente a matriz  $B^{-1}$  (EDGAR e HIMMELBLAU, 1988). Somente um subconjunto de colunas precisa ser modificada para se alcançar a nova matriz  $B^{-1}$  e retornando à etapa 2, agilizando assim o processamento.

A solução de um problema de grande porte exige muito esforço computacional e, ao utilizar a aritmética do ponto flutuante, problemas numéricos podem surgir. Não é verdade que todo problema de grande porte é numericamente difícil, mas a tendência é que sejam mais propensos a dificuldades numéricas que os problemas menores (SILVA e ARENALES, 2007). Nos métodos tipo simplex, as fontes de imprecisão são, principalmente, as operações feitas com a inversa da matriz básica ou formas equivalentes. Em tais operações, os erros de arredondamento ocorrem e são acumulados, propagando-se de uma iteração para outra. As consequências podem ser uma solução numericamente inexata, uma base ótima errada, ou mesmo conclusões

equivocadas, como por exemplo, problema factível declarado como infactível e problema ilimitado com solução ótima, ou vice-versa. Além disso, os cálculos podem se degenerar em qualquer momento se um elemento muito pequeno for erroneamente escolhido como pivô.

A questão da eficiência do método simplex sempre foi tema de pesquisa desde sua publicação. No início, a convergência finita do método, garantida com regras que evitassem ciclagem, era suficiente para os pesquisadores. No entanto, o número máximo de iterações poderia ser muito grande. Um conjunto de relatos sobre sua eficiência em problemas práticos ou gerados de forma aleatória foi analisado por (GOLDBARG e LUNA, 2005).

## **2.4 Eficiência do algoritmo Simplex**

É importante observar que a evolução das implementações computacionais dos “resolvedores” lineares teve um papel fundamental no progresso da Otimização Linear. Um exemplo disto é o pacote CPLEX, que vem sendo melhorado desde sua primeira versão lançada em 1988. Sousa et al. (2005) relataram que a implementação do método dual simplex, na primeira versão do pacote CPLEX 1.0 rodado numa estação de trabalho UltraSparc de 300 MHz, resolvia um problema de 16.223 restrições e 28.568 variáveis, com 88.340 elementos não nulos em 1.217,4 segundos e, o mesmo método na versão CPLEX 7.1 na mesma máquina, resolvia o mesmo problema em 22,6 segundos. Ou seja, um mesmo método pode se tornar 50 vezes mais rápido dependendo de sua implementação. Vale observar que esta relação de desempenho também foi obtida por Karmarkar em 1984, que afirmou que o método de pontos interiores era 50 vezes mais rápido do que o método simplex. Obviamente, estruturas de dados adequadas são fundamentais para um bom desempenho de uma implementação computacional (SOUSA et al., 2005).

De acordo com os resultados obtidos por Silva e Arenales (2007) na implementação do método dual simplex linear por partes que utiliza técnicas de esparsidade, comparados com os resultados obtidos pela implementação do mesmo método que não faz uso dessas técnicas e, portanto, trata o problema como denso,



pode-se dizer que houve uma grande evolução em relação ao tempo total de resolução. Em alguns exemplos a implementação esparsa foi aproximadamente 100 vezes mais rápida que a implementação densa e, quanto maior o tamanho dos problemas, maior a diferença no tempo de resolução (SILVA e ARENALES, 2007).

### **3 OTIMIZAÇÃO DO PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO**

A usina siderúrgica abordada tem uma configuração bastante complexa, devido à produção de famílias de aços que possuem processos de produção diferentes, compartilhando os mesmos equipamentos. O planejamento da produção deve considerar, por exemplo, a demanda de clientes, as necessidades de matérias-primas e estoques, as capacidades dos equipamentos, a possibilidade de falhas nos equipamentos e restrições nos processos de fabricação, entre outros (SLACK *et al*, 2002). O desafio é conceber um planejamento da produção que seja tanto realista quanto econômico.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1 é apresentada o Plano de Produção e Vendas (PPV), a importância e as abordagens encontradas na literatura. A seção 3.2 mostra que o mesmo problema pode ter várias funções objetivo e que há necessidade de melhoria contínua no processo de planejamento.

A seção 3.3 mostra o balanceamento de linha no planejamento da produção e as diversas abordagens encontradas na literatura: com um ou vários produtos, determinísticas ou probabilísticas, utilizando programação linear, inteira ou binária dentre outras.

Na seção 3.4 é apresentada a modelagem de balanceamento de linha envolvendo estoque tanto de produto acabado quanto entre as faces de produção.

#### **3.1 Plano de produção e vendas**

O Planejamento, Programação e Controle da Produção (PPCP) relaciona objetivos estratégicos à produção e coordena os vários esforços de planejamento em

um negócio, incluindo planejamento de marketing, planejamento financeiro, planejamento de operações e planejamento de recursos humanos (MARTINS e LAUGENI, 2005). O sistema PPCP é uma área de decisão da empresa, cujo objetivo corresponde tanto ao planejamento quanto ao controle dos recursos do processo produtivo a fim de gerar bens e serviços.

O PPCP também é um sistema de transformação de informações, pois recebe informações sobre estoques existentes, vendas previstas, linha de produtos, modo de produzir, capacidade produtiva e tem como incumbência transformar essas informações em ordens de fabricação (MARTINS e LAUGENI, 2005).

Para Martins e Laugeni (2005) existem dois tipos de Planejamento. O primeiro, denominado de Plano de Produção e Vendas (PPV), é uma previsão de como a produção se comportará em termos de volume e estoques para atendimento da demanda de mercado projetada pela empresa. Essa previsão deve considerar todas as restrições operacionais e de mercado. O segundo faz uma previsão do comportamento do contingente de mão de obra e dos regimes de trabalho a serem adotados pela empresa. Esse tipo de planejamento é característico de empresas prestadoras de serviços. Semelhante definição é feita por Vollmann et al. (2006). Esses autores posicionam o Plano de Produção e Vendas como um nível de planejamento intermediário entre o planejamento estratégico e operacional, ou seja, no nível tático.

Entre as possíveis abordagens para o Plano de Produção e Vendas tem-se (TAHA, 2008; HILLIER, 2006; GOLDBARG, 2005; WAGNER, 1986; DANTZIG, 1963):

- modelo matemático de programação de produtos usando as instalações normais de produção para atender à demanda durante um único período;
- modelo matemático com utilização do estoque em um sistema de produção que abrange vários períodos para atender à demanda futura.

Slack et al. (2002) afirmam que o horizonte coberto pelo planejamento é ditado pela natureza e dinâmica das flutuações da demanda. Ressaltam ainda, que o horizonte mais adequado é entre seis e dezoito meses, sendo doze o mais usual.

Barbosa et al. (1984) apud Moreira Jr (2009) apresenta um modelo de otimização para a então Acesita, hoje ArcelorMittal Inox Brasil. O modelo integra as áreas de planejamento da produção, marketing, vendas, finanças e operacional da empresa,

maximizando a margem de contribuição global. Sua premissa básica é que a empresa tem possibilidade de trabalhar a demanda no sentido de obter uma mistura de produtos mais rentável. Além de maximizar a margem, o modelo monitora o volume de produção, o faturamento e o total dos custos variáveis de produção. Como saídas, apresenta, além do citado, os volumes de produção, o nível de ocupação, a geração interna de sucata e os volumes de venda distribuídos por mercados. O mercado é segmentado de diversas maneiras. Suas principais limitações são: considerar o tempo em um único período e manter os estoques constantes ao longo do mesmo.

Chen e Wang (1997) apresentam um modelo de otimização do planejamento desenvolvido para uma indústria siderúrgica do Canadá. Essa siderúrgica possui uma malha logística muito extensa, composta de cinco unidades, sendo uma unidade central com aciaria e laminação, quatro unidades de relaminação que recebem semi-elaborados da unidade central e de terceiros, suprimentos de matéria-prima (sucata de aço) oriundos de diversas regiões, centros de distribuição em vários pontos e clientes em todas as regiões do país e no exterior.

O modelo de otimização do planejamento foi desenvolvido maximizando o lucro total e opera em dois estágios. No primeiro, a função objetivo é a maximização do lucro uma vez que as produtividades e as margens de lucro são diferentes para cada produto final e semi-acabado.

O balanceamento de linha considera as capacidades da unidade central, das relaminações, dos diversos centros de distribuição e a entrega aos clientes. No segundo, fixando o resultado do primeiro, busca-se a minimização dos custos envolvidos. O modelo também considera um único período de tempo.

Amen (2006) apresenta um modelo de balanceamento de linha orientado pelo custo. Sarker e Pan (1998) modelaram uma linha de montagem com vários produtos com o objetivo de minimizar os custos e os tempos ociosos da linha. Becker e Scholl (2006) fazem um levantamento sobre os problemas e os métodos para o balanceamento de linha generalizado. Fokkert e Kok (1997) fazem uma comparação entre modelos com um e com vários produtos. Gerhardt et al. (2007) apresentam metodologia para o balanceamento de linhas de montagem multiprodutos em ambientes capazes de alternar diferentes modelos de um mesmo produto e Karabati e

Sayin (2003) propõem um sequenciamento de vários produtos em ambiente com transferência sincronizada.

Fernandes et al. (2008) usam a programação inteira 0-1 para o balanceamento de linhas de montagem. Bukchin e Rabinowitch (2006) e Gokcen e Erel (1998) também fazem abordagens baseada na programação inteira para linha de montagem com vários produtos de minimizando o número de estações.

### **3.2 Função objetivo para otimização**

A análise das inter-relações entre as atividades de uma grande organização, explicitando os conflitos de objetivos entre os departamentos, pode ser ilustrada na Tabela 3.1. Os setores de produção e de vendas têm estratégias divergentes quanto à diversificação da produção, ao passo em que o setor financeiro pretende uma política de estoques diferente da política dos setores de produção e vendas. Esses setores também divergem do setor de pessoal quanto ao nível de produção (LINS e CALÔBA, 2006).

Na literatura, os diferentes objetivos e estratégias foram modelados através de Problema de Programação Linear que representa as restrições referentes aos recursos disponíveis nos setores, e busca maximizar o lucro. Esse lucro é resultante das receitas com vendas menos os custos com pessoal e estoques. Segundo Lins e Calôba (2006), esse problema é denominado “On the Job Training” ou jogos de empresa.

A minimização de custos vem deixando de ser exclusiva nos modelos utilizando Programação Linear (SLACK et al., 2002). O que determina a utilização de uma ou outra função objetivo é o domínio que a empresa tem sobre a gestão de sua demanda. Quando não consegue ter interferência no nível de compra de seus clientes, a ênfase deve ser na minimização de custos. Se ao contrário, a mesma tiver uma margem de escolha nas vendas ou o mercado tiver certa elasticidade, a escolha deve ser pela maximização dos resultados.

Há uma necessidade de melhoria contínua no processo de planejamento, visto que, à medida que as empresas implantam sistemas de Planejamento, Programação e Controle da Produção, há uma evolução natural em direção às questões do

planejamento global da produção convergindo para outros módulos do sistema de PPCP (VOLLMAN et al., 2006).

Tabela 3.1 Setores, objetivos e estratégias envolvendo Pesquisa Operacional

<i>Setores</i>	<i>Objetivos</i>	<i>Estratégias</i>
Produção	Mínimo custo de produção Máximo volume de bens	Linha de produção restrita e estoques elevados
Vendas	Máximo volume vendido Mínimo custo com vendas	Estoques elevados, mas produção diversificada (aumento da complexidade de produção)
Financeiro	Mínimo capital para determinados tipos de negócios	Redução de estoques. Produção variável
Pessoal	Máxima produtividade por empregado. Máxima motivação	Manter nível de produção constante para evitar demissões

Fonte: (LINS e CALÓBA, 2006)

### 3.3 Balanceamento de linha no planejamento da produção

Na literatura, o objetivo geral do balanceamento de linha é o de minimizar o número de estações de uma linha fixa para um ciclo de tempo. Em outras palavras, o objetivo é minimizar o tempo ocioso da capacidade total fornecida pela soma das estações da linha. Assim, o balanceamento de linha de montagem é chamado de orientado pelo tempo. Outro objetivo do balanceamento de linha é o orientado pelo custo, no qual se busca minimizar o custo total por unidade de produto (AMEN, 2006).

O problema de balanceamento de uma linha de montagem pode ser definido da seguinte maneira: dado o número de modelos, as suas tarefas associadas, o tempo para realização de cada tarefa e suas relações de precedência, o problema consiste em alocar as tarefas a uma determinada sequência de estações, de modo que as relações de precedência sejam satisfeitas e a capacidade otimizada (GOKCEN e EREL, 1999; BECKER e SCHOLL, 2006). O problema se apresenta em duas abordagens: uni-

modelo e multi-modelo<sup>3</sup>. A diferença básica entre um problema de balanceamento de linha de montagem uni-modelo (ou único produto) para um problema multi-modelo (ou de vários produtos) reside no diagrama de precedências (FOKKERT e KOK, 1997). Em uma linha de montagem multi-modelo, todos os produtos possuem o seu próprio diagrama de precedências, e o balanceamento não deve violar suas respectivas restrições. Em uma linha uni-modelo, no entanto, somente um diagrama de precedências é gerado, sendo mais simples de se obter o balanceamento.

Segundo Sprecher (2003), são considerados tradicionalmente dois tipos de problema de balanceamento em linhas de montagem: o primeiro como objetivo minimizar o número de estações de trabalho ao longo da linha de produção. Se a estação for ocupada por um trabalhador, o objetivo pode ser interpretado como minimizar os custos relativos à mão-de-obra. E o segundo parte de um número de estações de trabalho fixo e tem como objetivo maximizar a taxa de produção ou, de forma equivalente, minimizar o tempo de ciclo.

Linhas de multi-modelos são geralmente utilizadas para montagem de dois ou mais modelos diferentes de um mesmo produto, cujos itens de produção se alteram de modelo para modelo continuamente na linha de produção (SARKER e PAN, 1998). No caso da siderurgia, o produto é o aço e os modelos são variações de: composição, dimensão, tratamento e acabamento. O mercado de cada modelo produzido pela linha é usualmente baixa, devido ao desejo do cliente por modelos variados e sua correspondente demanda.

Pesquisas sobre balanceamento do fluxo produtivo ou também conhecido como problema de balanceamento de linha foram bastante desenvolvidas nos anos 1960 e 1970 (McMULLEN e FRAZIER, 1997). Essas pesquisas mostram diversas abordagens para encontrar soluções ótimas para o problema de balanceamento de linha simplificado, porém quando feitas sob muitas suposições de simplificação, podem não ser realistas (McMULLEN e FRAZIER, 1997).

McMullen e Frazier (1997) apresentam o assunto de balanceamento para a configuração do que se está tornando mais comum na indústria moderna: produção

---

<sup>3</sup> A literatura descreve como uni-modelo (*single model*) a linha de montagem que processa um único tipo ou modelo de um terminado produto e multi-modelo (*mixed model*) a linha de montagem que processa vários tipos ou modelos de um produto.

diversificada, montagem rápida ou produção em linha, com modelo de sequenciamento misto, durações de tarefa aleatória, e o uso ocasional de equipamento duplicado (redundância). Nesse cenário, pode ocorrer que companhias adotem técnicas de JIT<sup>4</sup> e busquem tempos de ciclos cada vez menores. Segundo o mesmo autor, pouca pesquisa foi produzida para essa versão de balanceamento de linha. Embora esse tipo de configuração seja crescentemente encontrado nas companhias que tentam aumentar sua flexibilidade utilizando-se de linhas multi-modelo de produção, como também aumentar sua produção pelo aumento de produtividade. Novas abordagens para ajudar a resolver esse problema poderiam ser muito úteis para essas companhias.

Lehman (1969) apresentou uma formulação baseada em programação linear para o problema de balanceamento de linhas multi-modelo, com o objetivo de minimizar o custo total associado ao desbalanceamento, atraso no sequenciamento e aprendizado das tarefas. Bukchin e Rabinowith (2006) apresentaram uma formulação baseada em programação inteira que minimiza o excesso de trabalho existente nas estações.

Fokkert e Kok (1996) comparam duas classes de fluxo de linha de produção. A primeira classe consiste em modelo único de linha de produção, que são dedicados à produção de um único produto. Na segunda classe, o modelo misto e várias linhas de fluxo, são concebidos para produção de mais de um produto.

Gokcen e Erel (1997) apresentam um modelo de programação binária para o balanceamento de linha de montagem baseado nos conceitos desenvolvidos por Patterson e Albracht (1975). O modelo proposto fornece uma quantidade considerável de flexibilidade para o gestor, uma vez que vários objetivos conflitantes podem ser considerados simultaneamente.

Embora existam muitos estudos publicados sobre os diversos aspectos do problema, o número de estudos sobre o modelo binário para linhas de montagem é relativamente pequeno (GOKCEN, 1998). A natureza combinatória do problema de balanceamento de linha torna difícil a obtenção da solução ótima e é justamente o

---

<sup>4</sup> JIT ou *Just in Time* significa produzir bens e serviços exatamente no momento em que são necessários. Nem antes para que formem estoques e nem depois para que seus clientes não tenham que esperar (SLACK et al., 2002).

modelo misto de linha o tipo mais frequentemente encontrado na indústria, devido à pressão de se produzir vários itens buscando a maior satisfação do cliente.

Corominas et al. (2006) abordam os aspectos de trabalhadores qualificados e não qualificados em seu modelo de balanceamento. O problema foi modelado como um programa linear binário e resolvido com utilização do software comercial ILOG CPLEX 9.0 para a otimização.

O processo consiste em equilibrar as tarefas a serem realizadas na estação de trabalho, de tal forma a otimizar uma função objetivo (por exemplo, o número de postos de trabalho, tempo de ciclo ou custo unitário do produto). Além disso, uma estação pode estar sujeita a vários tipos de restrições, incluindo o tempo total de trabalho limitado a um determinado limite superior chamado de tempo de ciclo. São analisados, também as precedências e relações de incompatibilidade entre as tarefas.

Song et al. (2006) propõem um algoritmo recursivo para alocação de operador em um problema otimização de balanceamento de linha com considerações de discrepâncias de eficiência entre operadores. São propostos três índices para medir e avaliar o impacto de alocações de operadores no balanceamento: eficiência de operação mais baixa, eficiência da linha mais alta e eficiência de operação menos o total desperdício. Segundo os autores, os algoritmos recursivos desenvolvidos podem eliminar as desvantagens dos algoritmos existentes e melhorar a flexibilidade dos aplicativos em tamanhos diferentes de problemas de alocação de operador, e especialmente para melhorar a eficiência de busca da solução ótima para problemas de grande escala.

Os algoritmos de balanceamento de linhas são classificados de acordo com os tempos de realização das tarefas. Quando esses forem fixos tem-se um modelo determinístico e quando forem descritos por distribuição de probabilidade, tem-se um modelo estocástico (EREL e SARIN, 1998).

Segundo Erel e Sarin (1998), a versão estocástica é mais realista em linhas de montagem manuais, em que o tempo de execução pode ser variável. Nesse caso, pode ser necessária a instalação de estoques intermediários.

Nicosia (2002) estudou a Generalização do Balanceamento de Linha de Montagem Simples (generalized assembly line balancing problem, sigla GALBP) em



que diferentes estações de trabalho são disponibilizadas, com diferentes custos e velocidades. Nesse caso, um conjunto de operações, com tempos individuais, deve ser atribuído a um conjunto de estações. O pedido (ou ordem de serviço) na qual as operações podem ser realizadas é limitado por um conjunto de atividades, e o objetivo é minimizar o número de estações necessárias para atingir um dado objetivo. O autor classifica-o como um problema NP-difícil e relata que numerosos métodos têm sido propostos para a solução desse problema, incluindo algoritmos de programação linear, programação dinâmica e heurística.

Fernandes et al. (2008) utilizam procedimentos de solução exatos (no caso, programação inteira 0-1) para um problema GALBP relativamente grande (linha com 80 tarefas). O objetivo é minimizar do tempo ocioso total para um dado tempo de ciclo fixo, o que equivale a minimizar o número de estações de trabalho. Consegue-se uma redução de mais de 10% no número de estações de trabalho.

A solução para o problema de balanceamento de linhas multi-modelo apresentada por Karabati e Sayin (2003) se aplica especificamente a ambientes produtivos em que o transporte de materiais pela linha é feito de forma sincronizada, isto é, nos quais o dispositivo transportador movimenta-se periodicamente por um tempo pré-determinado. Em conjunto com o problema de balanceamento, os autores consideram a sequência na qual os diferentes produtos são introduzidos na linha, integrando a alocação das tarefas às estações de trabalho e às decisões de sequenciamento dos produtos. A formulação matemática desenvolvida pelos autores tem como objetivo minimizar o tempo total de ciclo, dada uma sequência inicial de produção, sendo operacionalizada pela combinação dos vários produtos em um único, por meio da soma dos tempos de operação.

Levitin et al. (2006) desenvolvem uma solução para o problema de balanceamento da linha de montagem automatizada utilizando algoritmo genético (AG). Segundo os autores, o algoritmo genético se mostra consistente e robusto, conseguindo encontrar, em tempos computacionais reduzidos, soluções de melhor qualidade que as obtidas por algoritmo *Branch and Bound*, e resolvendo problemas grandes e complexos em mesmo tempo.

O problema de balanceamento de linhas de montagem multi-modelo em um ambiente *make-to-order*<sup>5</sup> foi introduzido por Bukchin et al. (2002). Os autores admitem que, neste ambiente, os trabalhadores devem ser mais versáteis que os trabalhadores das linhas tradicionais, o que possibilita alocar o mesmo elemento de trabalho a diferentes estações.

Considerando este fato, as tarefas de montagem são divididas em dois conjuntos: o primeiro contém as tarefas que devem ser alocadas a uma estação específica, independente do modelo do qual ela necessita; o segundo é formado pelas tarefas que podem ser alocadas a qualquer estação. Consequentemente, a heurística desenvolvida pelos autores com o objetivo de minimizar o número de estações de trabalho ao longo da linha tem o seu procedimento desenvolvido em três estágios. No primeiro, a partir da união dos diagramas de precedência dos diferentes modelos em um diagrama equivalente, é alocado o primeiro conjunto de tarefas às estações.

Após, o balanceamento de cada modelo é feito separadamente, designando as tarefas do segundo conjunto às estações, considerando as tarefas já alocadas. No último estágio, a solução é melhorada por meio de um algoritmo de busca local, realizando mudanças na alocação das tarefas do primeiro conjunto.

Vilarinho e Simaria (2002) apresentam um modelo de programação matemática para o problema de balanceamento de linhas de montagem multi-modelo, o qual admite estações de trabalho paralelas e restrições de zoneamento. O modelo permite que se defina a priori o número máximo de réplicas das estações de trabalho, além das condições para que as réplicas ocorram. O algoritmo apresenta dois estágios específicos: minimizar o número de estações de trabalho ao longo da linha e dividir a carga de trabalho entre as estações da melhor forma possível.

Pastor et al. (2002) fazem uso de uma estratégia meta-heurística com uma abordagem de busca tabu otimizando o resultado de procedimentos heurísticos empregados. Os autores tratam do problema de balanceamento de linhas multi-modelo com objetivos adicionais de uniformização da carga de trabalho e otimização da dispersão das tarefas na produção dos diferentes modelos, além de restrições de disponibilidade de espaço e existência de estoques intermediários.

---

<sup>5</sup> Make-to-order: estratégia onde se inicia a produção somente após o recebimento do pedido.

O algoritmo apresentado por Kim et al. (2000) procura unir o balanceamento ao sequenciamento dos modelos a serem lançados na linha. O algoritmo utilizado pelos autores, denominado evolucionário simbiótico, simula o processo evolutivo da natureza em que as espécies possuem influência umas sobre as outras na interação e adaptação com o meio-ambiente. Os autores consideram que esse processo é similar a situações nas quais diversos problemas estão relacionados entre si, de tal forma que uma pequena mudança na solução de um problema isolado possa vir a afetar a solução dos outros problemas envolvidos.

Bock et al. (2006) também abordam o problema de balanceamento juntamente com a sequência de introdução dos modelos na linha, levando em consideração possíveis distúrbios como: falta de operadores, interrupções não programadas e falta de material durante o processo de produção. Os autores consideram a possibilidade de emprego de operadores flutuantes, os quais podem ser temporariamente alocados a uma estação a fim de aumentar sua capacidade. O modelo sugerido objetiva minimizar os custos de produção com abordagens heurísticas próprias para uso em tempo real e em ambientes dinâmicos, nos quais os recursos computacionais devem ser utilizados da maneira mais eficiente possível. O procedimento iterativo de otimização da solução faz uso de uma busca de variáveis de vizinhança empregando computação paralela.

O algoritmo de otimização desenvolvido por McMullen e Tarasewich (2003) baseia-se em Colônia de Formigas, a fim de tratar o problema de balanceamento de linhas de montagem com fatores como: estações de trabalho paralelas, atividades com duração estocástica e modelos mistos. A metodologia é inspirada no comportamento social dos insetos como forma de alocar tarefas às estações de trabalho, de forma a otimizar o desempenho da linha.

Gerhardt et al. (2007) apresentam uma metodologia para o balanceamento de linhas de produção multi-modelo. Propõem-se uma estrutura de decisão que orienta o usuário quanto à utilização do algoritmo de balanceamento multi-modelo mais adequado a seu cenário de aplicação e indicadores que permitem quantificar a melhoria resultante do balanceamento da linha multi-modelo.

Wagner (1986) apresenta modelos de programação linear para seleção de mistura de produtos acabados, como uma das funções do Planejamento e Controle da

Produção (PPCP). Esse autor frisa que nesse caso deve-se maximizar o lucro com a melhor mistura e, após a determinação da mistura ótima, minimizar os custos de produção.

### 3.4 Modelagem do estoque

Há inúmeras formas de modelagem para o planejamento da produção e do estoque, que vão desde a simples alocação de capacidade de máquina para atender à demanda até o caso mais complexo da utilização de estoque do produto acabado ou em fases intermediárias. Nesse caso, o estoque é utilizado para atenuar o efeito da mudança imprevisível na demanda para determinada projeção de planejamento (TAHA, 2008).

A modelagem de estoque trata da determinação do nível de certa mercadoria que uma empresa deve manter para garantir a continuidade operacional. A base da decisão é um modelo que equilibra o custo de capital resultante da permanência de excedente de estoque com o custo de multas resultantes do atraso na entrega. O principal fator que afeta a solução é a natureza da demanda: determinística ou probabilística. A demanda é usualmente probabilística, mas em alguns casos a aproximação determinística pode ser aceitável. A complexidade do problema de estoque não permite o desenvolvimento de um modelo geral que abranja todas as situações possíveis (TAHA, 2008).

A variação no tempo de preparação (*setup*) da máquina leva à necessidade de um estoque de segurança maior. O custo financeiro desse estoque, parado, em cada estágio, deve ser minimizado e uma das formas é reduzir a soma dos tempos de preparação (*setup*).

Szendrovits e Szabados (1997) consideram que para reduzir a variação no tempo de *setup* nos diversos estágios do fluxo produtivo é necessário alterar a preparação do processo que pode ser melhorado por medidas como padronização e automatização. Essa abordagem requer investimentos no estudo do processo e na implantação das mudanças.

Outra abordagem é o planejamento e a programação mais eficiente do estoque na fábrica. Ao contrário da primeira abordagem, a programação não exige um investimento substancial de recursos, apenas uma melhoria nos procedimentos de planejamento e programação (SZENDROVITS e SZABADOS, 1997).

Moreira Jr (2009), afirma que numa siderúrgica produtora de aços especiais, os estoques de produtos, em processo e acabados, representam uma parcela significativa do capital de giro. A administração dos níveis de estoque é de vital importância e por isso é necessário que os mesmos sejam projetados e acompanhados. Esse autor considera os estoques de produtos acabados no modelo de programação linear para a elaboração do Plano de Produção e Vendas de uma indústria siderúrgica. A manutenção de um nível mínimo de estoque de cada produto no final de cada período, visando manter um bom índice de atendimento de pedidos, é uma das premissas adotadas pela empresa.

Entre um equipamento e outro também é possível estocar *produtos em elaboração* (ou estoque PE) que são utilizados para atender a demanda em períodos subsequentes. Esses estoques são utilizados para minimizar o efeito de grandes paradas de equipamentos no fluxo produtivo. Essas paradas podem ser previamente definidas, por exemplo, grandes reformas ou aleatórias, por exemplo, tempo de reparo devido a quebra do equipamento. O custo financeiro do estoque também deve ser considerado na modelagem, devido ao impacto no fluxo de caixa da empresa (DUBOIS et al., 2008).

## **4 DESCRIÇÃO DO PROCESSO**

Implantada em 31 de Outubro de 1944, a ArcelorMittal Inox Brasil (ex Acesita S.A.) é a única produtora integrada de aços planos inoxidáveis e elétricos da América Latina, com desempenho que a destaca entre os grandes produtores mundiais do setor.

Sua implantação marcou o início da vocação siderúrgica da região que mais tarde seria chamada de Vale do Aço, vindo a receber posteriormente a USIMINAS, na cidade que se tornaria o município de Ipatinga.

A ArcelorMittal Inox Brasil é líder em seu segmento no mercado brasileiro, com 90% de participação, e exporta para outros 57 países. A exportação ganhou um impulso maior após integração com a rede de distribuição de sua matriz ArcelorMittal, o maior grupo siderúrgico mundial, com sede em Luxemburgo.

A usina, localizada no município de Timóteo, no leste de Minas Gerais, possui capacidade instalada para produzir 900 mil toneladas/ano de aço líquido e um avançado Centro de Pesquisas, que desenvolve e testa produtos para diversas aplicações no mercado. A companhia emprega diretamente cerca de três mil pessoas.

### **4.1 Processo produtivo da ArcelorMittal Inox Brasil**

As usinas siderúrgicas, segundo Mourão et al. (2007), podem ser divididas em dois grandes grupos: usinas integradas e usinas semi-integradas. Uma usina é considerada integrada quando o aço é obtido a partir de ferro primário, isto é, a matéria-prima é o minério de ferro, que é transformado em ferro na própria usina, nos altos-fornos. A usina semi-integrada tem como matéria-prima a sucata de aço.

Uma usina siderúrgica integrada, o processo que vai das matérias-primas ao produto final é constituído pelas seguintes etapas principais: extração do ferro de seu minério nos altos-fornos; conversão do ferro gusa, produto intermediário, em aço; o lingotamento do aço líquido de forma a solidificar em forma conveniente para as operações seguintes; e, finalmente, a conformação do metal na forma de produto.

O fluxo produtivo da ArcelorMittal Inox Brasil é considerado integrado e complexo (Figura 4.1). Integrado devido ao fato de partir da matéria prima (minério) e processá-lo

até a laminação final do produto. É considerado complexo pelo fato de se produzir, paralelamente ou em sequência, vários tipos de aços com composições bem distintas.

Essa diversidade de produção leva a várias paradas de preparação dos equipamentos (*setup*), elevando o volume de estoque de produto em elaboração entre esses equipamentos. A diversidade também leva a uma grande dificuldade de se programar a produção em equipamentos com produtividades são bem distintas entre produtos. A seguir, tem-se uma descrição resumida do fluxo produtivo dos principais produtos da ArcelorMittal Inox Brasil.

O fluxo começa na área de redução com a produção dos Alto Fornos. Nessa etapa a matéria-prima (minério de ferro ou pelota) é transformado em gusa líquido. A Figura 4.2 mostra a matéria prima, pelota, sendo retirada da pilha para abastecimento do Alto Forno.

O gusa, ainda no estágio líquido, é transferido por carro torpedo para a aciaria. Na aciaria, o gusa passa por processos metalúrgicos, transformando-se nos tipos de aço fabricados pela empresa: inox, elétrico ou carbono. A Figura 4.3 mostra o processo de carga de gusa líquido no convertedor na Aciaria. Em seguida, no lingotamento contínuo, o aço líquido é transformado em placas que são conduzidas para a laminação de tiras a quentes (LTQ).

Na laminação de tiras a quente, o produto, em forma de placa, é reaquecido e laminado inicialmente pelo laminador desbastador *rougher* e na sequência pelo laminador a quente *steckel* (Figura 4.4), gerando um produto denominado BQP (bobina laminadas à quente preta). Esse produto pode ser comercializado já nessa fase de transformação ou direcionados para a linha de laminação a frio, agregando, assim, maior valor ao produto.

As bobinas de aços inoxidáveis (Figura 4.5) e elétricos são então laminadas a frio, nas linhas específicas, dando origem aos produtos finais dentro das especificações estabelecidas pelos clientes.

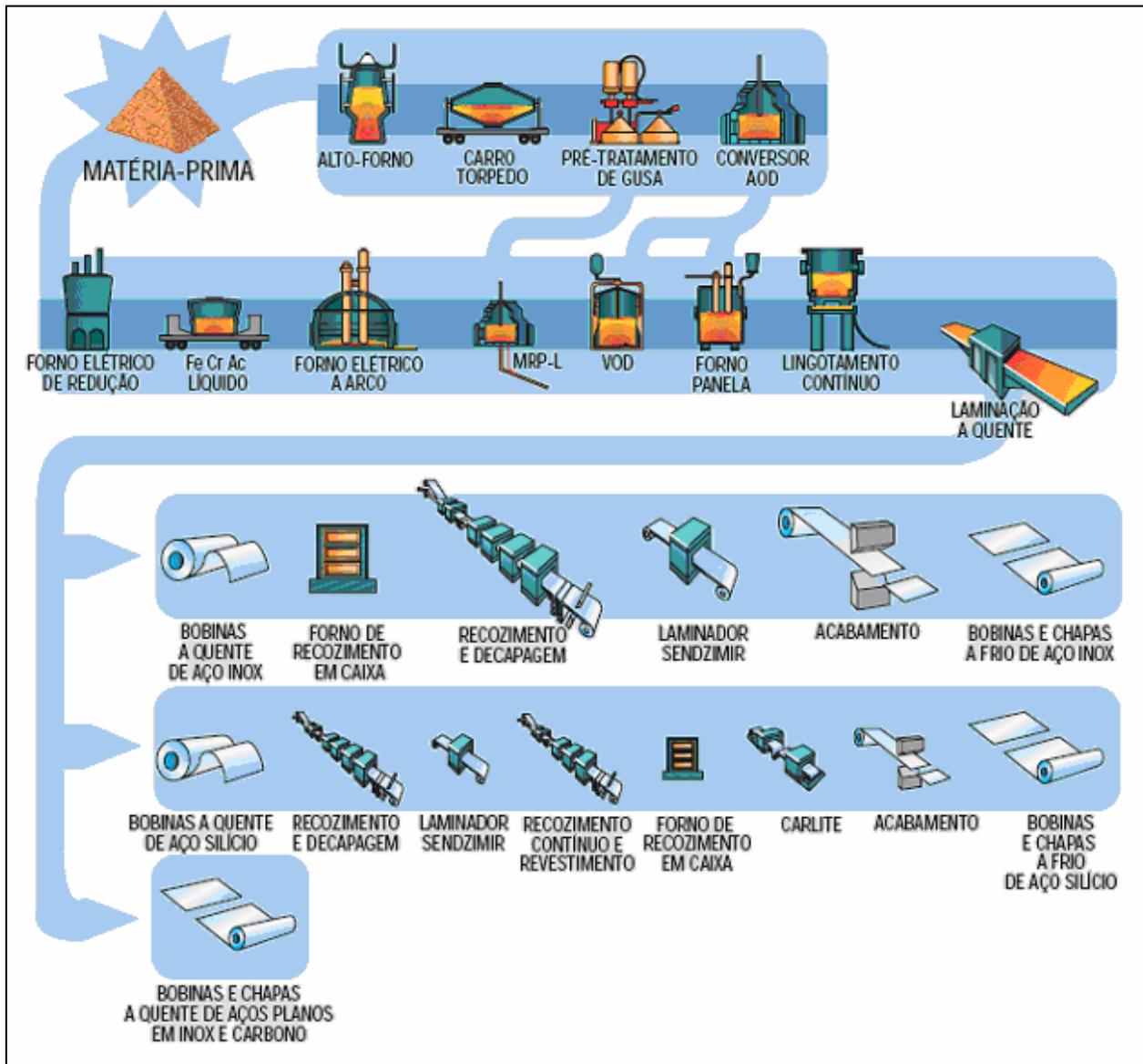


Figura 4.1 – Fluxo de produção da ArcelorMittal Inox Brasil (AMIB).

O fluxo produtivo da AMIB é considerado integrado, pois o produto parte da matéria-prima (minério) e processa até o produto final laminado a frio.

Fonte: site da empresa





Figura 4.2- Foto da matéria prima (pelota) sendo retirada da pilha para abastecimento do Alto Forno.

Fonte: site da empresa



Figura 4.3 – Foto do processo de carga de gusa no convertidor MRP na Aciaria.

Na aciaria, o gusa passa por processos metalúrgicos transformando-se nos aços: inox, elétrico ou carbono

Fonte: site da empresa



Figura 4.4 – Foto da placa já reaquescida na entrada do laminador desbastador rougher.

Fonte: site da empresa

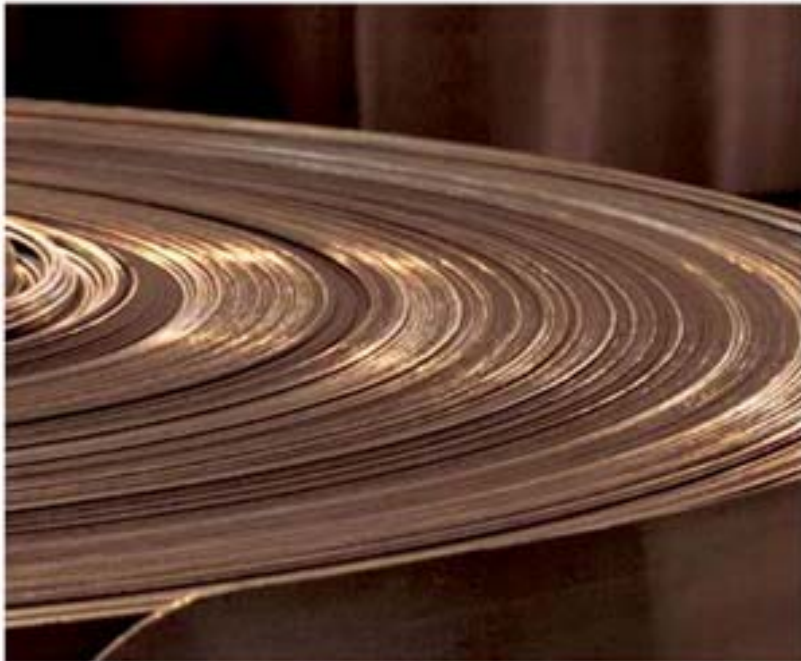


Figura 4.5 – Foto da bobina laminada a quente preta (BQP) resultante da laminação da placa no laminador a quente Steckel.

Fonte: site da empresa

Na sequência, os produtos são processados de forma contínua, isolada ou em lotes (bateladas), em função dos equipamentos utilizados.

Os produtos são processados individualmente nos laminadores, preparadoras, tesouras, esmerilhadeiras e etc. O processamento contínuo ocorre tanto nos recozimentos iniciais quanto finais. No recozimento em caixa, o processamento é feito em lotes de 3 a 4 bobinas (Figura 4.6).

Após a laminação final, o produto passa pelas tesouras transversal (TT) ou longitudinal (TL) para ser recortado em *blanks* ou tiras (Figura 4.7).



Figura 4.6 – Foto das bobinas sendo processadas em bateladas nos fornos de recozimento em caixa.

Fonte: site da empresa



Figura 4.7 – Foto da bobina sendo recortada em tiras na tesoura transversal.

Fonte: site da empresa

O produto final é então embalado (Figura 4.8). Nesse momento, o produto recebe o nome de Produto Acabado (PA) e está preparado para ser enviado aos clientes ou para os centros de serviços.



Figura 4.8 – Foto do Produto Acabado (PA) sendo expedido para o cliente.

Fonte: site da empresa

## 4.2 Produtos da ArcelorMittal Inox Brasil

A usina siderúrgica tem a característica de ser poli-produtora onde os produtos podem ser totalmente substituídos entre si. Esta característica torna a determinação da mistura mais relevante, pois, do ponto de vista operacional, respeitando-se alguns parâmetros, tem-se uma enorme flexibilidade na oferta de produtos. Isto faz com que as áreas de vendas e de marketing tenham um grande peso na determinação desta mistura (MOREIRA Jr, 2009).

A ArcelorMittal Inox Brasil processa três grandes grupos de aço: inoxidável, elétricos e carbono.

Os aços inoxidáveis fazem parte do dia-a-dia de milhões de pessoas. Estão nas cozinhas, nas pias, talheres e panelas. Também estão nos eletrodomésticos, automóveis, ônibus e vagões ferroviários; nas fachadas, elevadores, escadas-rolantes, mobiliários urbanos. E ainda nas cozinhas industriais, equipamentos hospitalares, equipamentos de bens de capital e na indústria em geral.

São múltiplas aplicações consagradas pelo uso, facilidade de limpeza, manutenção e assepsia. E inúmeras possibilidades de novas aplicações – que desafiam a ousadia dos profissionais, tanto pelo apelo visual, quanto pela economia e durabilidade. Uma das aplicações mais conhecidas do aço inox é em utilidades domésticas (talheres, facas, baixelas, panelas, jarras e diversos utensílios de cozinha).

O aço inox é um material de elevada resistência à corrosão, que conserva as qualidades originais dos produtos por muito tempo.

Sua superfície não porosa e lisa (similar ao vidro) dificulta o acúmulo de alimentos e faz com que sejam limpos com mais facilidade, evitando a proliferação de bactérias nos diversos utensílios. É o material ideal para aplicações onde existe esse risco de contaminação (retenção de microorganismos 10 vezes inferior em relação ao plástico ou aço esmaltado), contribuindo para a assepsia e higiene necessárias à saúde e ao trato com alimentos. Também não altera o aroma, cor e sabor dos alimentos e bebidas, por não desprender partículas metálicas, mesmo em contato por tempo prolongado.

Na *linha branca* as aplicações incluem: mesa de fogão, cestos de lavadoras de roupas, coifas e depuradores, portas de refrigeradores, microondas e fornos elétricos, revestimentos externos de lavadoras e fogões

Atende ainda, a caldeirarias e fabricantes de máquinas e equipamentos. Nesse setor, os aços inoxidáveis da ArcelorMittal Inox Brasil encontram aplicações nas mais variadas indústrias como: exploração de petróleo, química e petroquímica, papel e celulose, fabricantes de cerveja e suco de laranja, indústrias farmacêuticas e alimentícias, implementos agrícolas e usinas de açúcar e álcool. Exemplos de aplicações: sistemas de cozimento, evaporação e secagem de celulose / açúcar, tanques de armazenamento de suco de laranja, tubos flexíveis para exploração de petróleo, sistemas para fermentação de cerveja, equipamentos para resfriamento de leite e etc.

Na construção civil, reúne empresas fabricantes de elevadores, caixas d'água de aço inox, telhas de aço inox e sistemas de aquecimento solar.

Atende às empresas relaminadoras e fabricantes de discos para moedas de aço inoxidável. As moedas de inox mantêm o mesmo brilho e aspecto durante muito tempo, mesmo sendo manipuladas diariamente. Os aços relaminados em espessuras finas de até 0,05 milímetros são utilizados na indústria automobilística, equipamentos dentários, contatos eletrônicos, molas etc.

Os tubos de aço inoxidável são largamente utilizados nas indústrias alimentícias. São utilizados também em dutos para transporte de produtos químicos, em sistemas de exaustão, mobiliário urbano e doméstico, trocadores de calor, na indústria química e petroquímica, papel e celulose.

Os aços elétricos são fabricados no Brasil desde 1957 e a ArcelorMittal Inox Brasil é produtora exclusiva na América Latina dos aços elétricos de grão orientado (GO) e aços elétricos de grão não-orientado (GNO).

A presença do silício na composição química desses aços, aliada ao rígido controle de processo em todas as etapas de produção, assegura excelentes propriedades magnéticas, capazes de garantir maior eficiência aos equipamentos elétricos e economia de energia.

O aço GO possui as propriedades magnéticas otimizadas na direção de sua laminação, enquanto o GNO apresenta boas propriedades em qualquer direção considerada.

Os aços elétricos GO foram desenvolvidos para alcançar baixas perdas e elevada permeabilidade magnética. Sua principal característica é apresentar excelentes propriedades magnéticas na direção de laminação.

São aplicados basicamente na fabricação dos núcleos de transformadores de força e distribuição, sendo também utilizados em reatores de potência, hidrogeradores e turbogeradores. Os aços elétricos GO têm como acabamento superficial o revestimento denominado C5 (norma ASTM) e pode ser fornecido em bobinas ou tiras, conforme normas internacionais.

Os valores limites das perdas magnéticas referem-se ao produto totalmente processado, testado após recozimento, para alívio de tensões introduzidas pelo corte, em amostras cortadas na direção da laminação.

Os aços elétricos GNO, totalmente processados, apresentam suas propriedades magnéticas plenamente desenvolvidas e abrangem as mais variadas classes exigidas pelo mercado.

Possuem excelente valor de permeabilidade, baixas perdas magnéticas e podem ser fornecidos com revestimento isolante.

Seu emprego é muito amplo, sendo aplicados nos núcleos de geradores e motores elétricos (de pequeno a grande porte), reatores para sistemas de iluminação, medidores de energia, motores para compressores herméticos de geladeiras, freezers e ar-condicionado, entre outros.

Os aços carbonos são classificados como: médio carbono, alto carbono e ligados. Nos aços médio e alto carbono são especificados somente os teores de carbono, silício, manganês, fósforo e enxofre. Os aços ligados, além desses elementos, são especificados também pelos seguintes elementos: cromo, níquel, molibdênio, vanádio, boro etc.

Os aços carbono são empregados em: serras, instrumentos de cutelaria, ferramentas e implementos agrícolas os utilizam em larga escala. O mesmo acontece com o setor de relaminação, com enfoque na indústria automobilística.

## 5 MODELAGEM DO PLANO DE PRODUÇÃO E VENDAS

O Plano de Produção e Vendas (PPV) de uma siderúrgica é um plano que distribui a demanda anual do cliente no fluxo produtivo em períodos mensais. Essa distribuição é limitada pela capacidade dos equipamentos do fluxo e pela política de estoque adotada. Esse problema pode ser modelado como um problema de programação linear tendo como função objetivo a maximização ou minimização de uma equação linear. No problema de balanceamento de linha foi definida como maximização do lucro da empresa. Em outro contexto, poderia ser a minimização do custo.

As variáveis de decisão são as quantidades de produtos em elaboração, processados em determinados equipamentos, ou as quantidades de produtos acabados entregues aos clientes. Essas quantidades de produtos serão expressas em toneladas (t), tanto na fase de elaboração quanto na estocagem.

As restrições determinam limites mínimos e máximos para: i) quantidade de produto entregue ao cliente; ii) quantidade de cada produto em processamento em um determinado equipamento e iii) quantidade de produto em elaboração ou acabado em estoque.

As restrições também determinam limites mínimos e máximos de agrupamentos, como: i) quantidade total de estoque de produto em um determinado local de armazenamento; ii) quantidade total produzida de um determinado equipamento e iii) quantidade total de horas consumidas de cada equipamento.

Os elementos da modelagem matemática: função objetivo, restrições relacionadas aos produtos, restrições de capacidade nos equipamentos, rendimento físico dos produtos serão apresentados nas seções a seguir. É apresentado também, a implementação do modelo, passo a passo, em planilha Excel. Para efeito didático, foram utilizados exemplos com apenas dois produtos e dois equipamentos. O problema real é composto por mais de 2.000 variáveis e mais 8.000 restrições. Ao final, são apresentados os resultados das três abordagens no planejamento de produção da empresa no problema real.

Neste capítulo são apresentadas três abordagens para plano de produção e vendas (PPV). A primeira trata do planejamento de produção de vários produtos em um



único período. A segunda considera vários períodos (12 meses) com um modelo para cada período e o resultado de um período é informação inicial para o próximo período. A terceira abordagem contempla vários períodos em um único modelo. Essa abordagem utiliza-se do estoque para atender à demandas futuras em horizonte de planejamento com vários períodos (12 meses).

Na seção 5.8 são apresentadas as três abordagens no plano de produção e vendas da ArcelorMittal Inox Brasil.

### 5.1 Função objetivo

Cada produto ou grupo de produtos (denominado família) tem seu preço previamente definido, com base em históricos e projeções de cenários futuros e que são definidos como premissas para o planejamento. A função objetivo busca maximizar o lucro da empresa. Os coeficientes da função objetivo ( $c$ ) serão os preços de cada grupo de produto entregue ao cliente.

Portanto, para cada unidade do produto  $x_j$  entregue ao cliente, tem-se um preço  $c_j$  associada. A função objetivo inicial é a maximização da soma de todos os produtos entregues aos clientes multiplicados por seus respectivos preços (equação 5.1).

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^p c_j x_j, \quad (5.1)$$

sendo  $p$  o número de produtos acabados ou famílias entregues ao cliente.

A cada equipamento do fluxo produtivo incide o custo de material adicionado e de transformação. Equipamentos similares podem ter custos diferenciados. Portanto, cada produto, em cada equipamento tem um custo associado. O peso desses custos é agregado à função objetivo multiplicado a quantidade do produto em elaboração processado no equipamento pelo custo individual de produção e somando à expressão da função objetivo (5.1). Nesse caso, são adicionadas todas as variáveis  $x_j$

relacionadas aos produtos em elaboração e os respectivos custos de produção  $c_j$  (Equação 5.2).

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^p c_j x_j + \sum_{j=p+1}^n c_j x_j \quad (5.2)$$

As  $p$  variáveis relacionadas a produtos acabados possuem coeficientes positivos e representam as margens de contribuição. Para as demais  $(n - p)$  variáveis, os coeficientes são negativos e representam o custo de produção em cada equipamento.

### Exemplo 1

Suponha, inicialmente, que a empresa processa dois tipos de produtos ( $P_1$  e  $P_2$ ) utilizando o equipamento  $E_1$  ou equipamento  $E_2$  (Figura 5.1). A quantidade de pedido do cliente é, por exemplo, 10.000t para o produto  $P_1$  e 2.000t de  $P_2$ . O preço do produto  $P_1$  é de R\$ 100 /t e o preço do produto  $P_2$  é de R\$ 200/t.

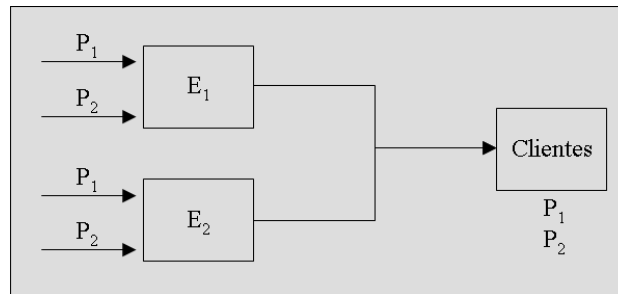


Figura 5.1 Fluxo de produção simplificado (Exemplo 1).

Os produtos  $P_1$  e  $P_2$  podem ser processados tanto no equipamento  $E_1$  quanto no  $E_2$ .

Foram registrados nas colunas \$A, \$B e \$C, na planilha (Figura 5.2), o *Equipamento*, o *Produto* e *Quantidade Produzida (t)* respectivamente. Registrou-se na faixa \$C10:\$C11 as *Quantidades dos Pedidos (t)* do cliente. A *Margem de Contribuição Total* (ou *Lucro*) é calculada com a seguinte função Excel:

=SOMARPRODUTO(\$C10:\$C11;\$D10:\$D11)

Essa função Excel equivale à equação (5.1) em que as quantidades produzidas  $x_1$  e  $x_2$ , armazenadas na coluna \$C da planilha, são multiplicadas pelos preços  $c_1$  e  $c_2$ , armazenadas na coluna \$D, resultando na Receita da empresa.

	A	B	C	D	E
1	<b>Balanceamento de Linha</b>				
2					
3	Equipamento	Produto	Quantidade Produzida (t)	Preço & Custo (R\$/t)	
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	4.000		
5		P <sub>2</sub>	2.000		
6		Total	6.000		
7	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	6.000		
8		P <sub>2</sub>	0		
9		Total	6.000		
10	Cliente	P <sub>1</sub>	10.000	100	Preço do Produto
11		P <sub>2</sub>	2.000	200	
12		Total	12.000		
13	Receita (Preço*Produção) R\$			1.400.000	=SOMARPRODUTO(C10:C11;D10:D11)

Figura 5.2 Planilha com os produtos P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> sendo produzidos nos equipamentos E<sub>1</sub> e E<sub>2</sub> (Exemplo 1).

### Exemplo 2

Considerando E<sub>1</sub> e E<sub>2</sub> equipamentos distintos e com custos de processamento diferenciados. Mantendo os preços dos produtos P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> e adicionando os custos em todos os produtos nos equipamento E<sub>1</sub> e E<sub>2</sub>.

O custo de produção é adicionado à função objetivo conforme equação (5.2), gerando o lucro da empresa. Dessa forma, para se atingir a meta maximizar o lucro, pode-se priorizar a produção de P<sub>1</sub> no equipamento E<sub>2</sub> e P<sub>2</sub> no equipamento E<sub>1</sub>, dentro de suas capacidades. O excedente deverá ser produzido nos equipamentos de custo superior.

	A	B	C	D	E
1	<b>Balaceamento de Linha</b>				
2					
3	Equipamento	Produto	Quantidade Produzida (t)	Preço & Custo (R\$/t)	
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	4.000	-90	
5		P <sub>2</sub>	2.000	-85	
6		Total	6.000		
7	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	6.000	-80	Custo da Complexidade do Fluxo
8		P <sub>2</sub>	0	-100	
9		Total	6.000		
10	Cliente	P <sub>1</sub>	10.000	100	Preço do Produto
11		P <sub>2</sub>	2.000	200	
12		Total	12.000		
13	Lucro (Preço * Produção - Custo de Produção) R\$			390.000	=SOMARPRODUTO(C4:C11;D4:D11)

Figura 5.3 Planilha da produção no Exemplo 2.

Fluxo alternativo dos produtos P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> nos equipamentos E<sub>1</sub> e E<sub>2</sub>, agregando o custo de produção.

A função objetivo pode ser tratada também como a maximização da margem. A margem de contribuição de cada produto é dada pelo preço menos o somatório dos custos do produto em todos os equipamentos de seu fluxo produtivo. Nesse caso, serão registrado apenas os custos adicionais de cada equipamento. Custos esses que não haviam sido computados nos custos originais do produto. A esses custos adicionais é dado o nome de custo da complexidade (Soares, 2005).

Nos desenvolvimentos a frente será adotada a maximização do lucro como sendo a margem menos o custo da complexidade.

## 5.2 Restrições relacionadas ao produto

A quantidade de cada produto entregue ao cliente está condicionada ao limite inferior (*LI*) e limite superior (*LS*) de produção. Os limites, *LI* e *LS*, são definidos para a elaboração do PPV por meio de estimativas de vendas futuras dada pela carteira comercial. Esses limites compõem o vetor *b* de restrições (equações 5.3 e 5.4):

$$x_i \leq b_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

na qual  $b_i$  é o limite superior ( $LS$ ) à quantidade  $x_i$  do produto acabado  $P_1$ , ou

$$x_i \geq b_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

na qual  $b_i$  é o limite inferior ( $LI$ ) à quantidade  $x_i$  do produto acabado  $P_1$ .

Com as restrições de limites acima são possíveis as seguintes situações:

1.  $LS_i = LI_i$ , indica que necessariamente  $x_i = LS_i = LI_i$ ;
2.  $LS_i = G$ , sendo  $G$  um valor grande (acima da capacidade do equipamento), indicando que não existe limitação máxima para o produto  $x_i$ .
3.  $LI_i = 0$ , indica que não existe limitação mínima para o produto  $x_i$ .
4.  $LS_i < LI_i$ , indica que o modelo não apresentará nenhuma solução viável.

As restrições de limites também são aplicadas às  $(n - p)$  variáveis relacionadas a produtos em elaboração, com as mesmas situações de limites acima citadas.

### Exemplo 3

No 3º exemplo, incluiu-se o limite inferior ( $LI$ ) e o limite superior ( $LS$ ) para a produção e para entrega ao cliente (Figura 5.4) no modelo. Para ilustrar, considere as seguintes de restrições: i) o equipamento  $E_1$  processa no máximo 4.000t de produto  $P_1$  e a soma dos produtos  $P_1$  e  $P_2$  não pode ultrapassar a capacidade do equipamento que é 8.000t; ii) o equipamento  $E_2$  deve processar no mínimo de 1.000t de  $P_2$  e a soma dos produtos  $P_1$  e  $P_2$  não pode ultrapassar a capacidade do equipamento que é 10.000t, e iii) o cliente tem um pedido de 10.000t do produto  $P_1$  e de 2.000t do produto  $P_2$ .

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Balanceamento de Linha</b>					
2						
3	Equipamento	Produto	Quantidade Produzida (t)	Limite Inferior LI	Limite Superior LS	Margem & Custo (R\$/t)
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	4.000	0	4.000	
5		P <sub>2</sub>	1.000	0	8.000	
6		Total	5.000	0	8.000	
7	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	6.000	0	10.000	-10
8		P <sub>2</sub>	1.000	1.000	10.000	-50
9		Total	7.000	1.000	10.000	
10	Cliente	P <sub>1</sub>	10.000	0	10.000	100
11		P <sub>2</sub>	2.000	0	2.000	200
12		Total	12.000	0	12.000	
13	Lucro (Margem*Produção-Custo de Complexidade) R\$					1.290.000

Figura 5.4 Planilha da produção (Exemplo 3).

Os produtos P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> com limites inferiores e superiores para produção em E<sub>1</sub> e E<sub>2</sub> e na entrega aos clientes.

A função objetivo que se deseja maximizar é o Lucro Total que está na célula \$F\$13. As variáveis do modelo são as quantidades  $x_1$  e  $x_2$  dos produtos P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> produzidas nos equipamentos E<sub>1</sub> e E<sub>2</sub> e as quantidades entregue ao cliente nos intervalos \$C\$4:\$C\$5, \$C\$7:\$C\$8 e \$C\$10:\$C\$11, respectivamente.

As restrições consideradas são descritas com as seguintes fórmulas:

- (i) \$C\$4:\$C\$12 <= \$E\$4:\$E\$12
- (ii) \$C\$4:\$C\$12 >= \$D\$4:\$D\$12

A fórmula (i) define o limite máximo de processamento de cada produto e a capacidade máxima de cada equipamento, e a fórmula (ii) define o limite mínimo para esses mesmos elementos.

O intervalo da restrição também engloba o pedido do cliente, pois a carteira de pedidos do cliente é definida informando o máximo de cada produto no intervalo \$E\$10:\$E\$11 e o mínimo de cada produto no intervalo \$D\$10:\$D\$11.

A Figura 5.4 mostra o lucro máximo de R\$ 1.290.000 na célula \$F\$13 que foi atingido respeitando todas as restrições, ou seja, as quantidades produzidas e as quantidades entregues são maiores ou iguais aos limites mínimos e menores ou iguais aos limites máximos.

### 5.3 Restrições de capacidade dos equipamentos

A produtividade do equipamento é definida pela quantidade de produto processada em determinado período de tempo. No caso da siderurgia, cada produto tem a sua respectiva produtividade ( $prod_i$ ), expressa em t/hora (toneladas por hora), que determina o total de horas necessárias em um equipamento para a produção de  $x_i$  toneladas do produto  $P_i$ . Um equipamento que processa diversos tipos de aço tem a sua produtividade variando em função do tipo de aço, largura e/ou espessura para cada produto (Suzuki, 1994).

Para ilustrar, um equipamento que processa placas de um determinado tipo de aço com peso unitário de 26t e com tempo de processamento de 10 minutos terá a produtividade  $p_i$  com o seguinte cálculo:

$$prod_i = (26 \text{ t} / 10\text{min}) * 60 \text{ min/h} = 156 \text{ t/h}$$

O agrupamento de tipos de produtos se faz necessário para a simplificação tanto da modelagem quanto da análise posterior à otimização. O critério utilizado para o agrupamento é a dispersão e a representatividade de cada produto. Podem-se ter agrupamentos por tipo de aço, aqui denominado de *família*, ou por faixa de espessura de laminação (material fino ou grosso). Como exemplo tem-se o produto 3XX grosso, processado no laminador a uma produtividade de 140 t/hora (Figura 5.5).



Figura 5.5 – Foto da placa posicionada para início de laminação a quente.

Um placa de 26t é processada em 10 minutos, resultando na produtividade de 156 t/h.

Fonte: site da empresa

A ocupação horária do equipamento será a soma das horas consumidas para todos os produtos produzidos em um período de tempo, por exemplo, um mês. Essa ocupação está limitada ao limite superior de horas disponíveis, conforme equação (5.5).

$$\sum_{i=a}^b x_i / prod_i \leq LS_a \quad (5.5)$$

Em que o equipamento produz as quantidades  $x_i$  dos produtos  $P_i$  nas produtividades  $prod_i$  para  $i = a$  até  $b$ .

#### Exemplo 4

Considerando-se a produtividade de 10 t/hora para o produto  $P_1$  e de 50 t/hora para o produto  $P_2$  no equipamento  $E_1$ , e considerando-se também 60 t/hora para o produto  $P_1$  e 80 t/hora para o produto  $P_2$  no equipamento  $E_2$ , tais equipamentos, trabalham em regime ininterrupto com total de 720 horas trabalhadas (para um mês de 30 dias). Qual a capacidade de atendimento, dado que a soma dos tempos de



processamento de todos os produtos em um determinado equipamento está limitado à 720 horas?

A planilha do Exemplo 3 foi alterada, incluindo-se uma coluna para conter as produtividades (coluna \$F), e 2 linhas (linhas 7 e 11) para contabilizar as horas de processamento (Figura 5.6). A fórmula:  $C7=SOMARPRODUTO(C4:C5;1/F4:F5)$  na Figura 5.6 contabiliza o tempo total de processamento do equipamento  $E_1$ , assim como a fórmula  $C11=SOMARPRODUTO(C8:C9;1/F8:F9)$  contabiliza o tempo total de processamento do equipamento  $E_2$ . A esse tempo total de processamento dá-se o nome de *ocupação horária* do equipamento. Nos dois casos, o tempo de ocupação horária está limitado a 720 horas (células \$E\$7 e \$E\$11).

Nesse caso, verifica-se que a fábrica não tem capacidade de atendimento ao pedido do cliente na sua totalidade. Os equipamentos  $E_1$  e  $E_2$  estão completamente lotados, ou seja, as ocupações horárias de  $E_1$  e  $E_2$  foram de 720 horas para cada equipamento. O lucro máximo atingido na célula \$G\$15 foi de R\$ 1.171.295, no período proposto de 720 horas. A fábrica deixou de entregar 1.182t em relação ao pedido do cliente de 12.000t, célula \$C\$14 (Figura 5.6).

	A	B	C	D	E	F	G	
1	<b>Balanceamento de Linha</b>							
2								
3	Equipamento	Produto	Quantidade Produzida (t)	Limite Inferior LI	Limite Superior LS	Produtividade t/hora	Margem & Custo (R\$/t)	
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	2.767	0	4.000	5,00		
5		P <sub>2</sub>	1.000	0	8.000	6,00		
6		Produção (t)	3.767	0	8.000			
7		Ocupação (h)	720	0	720			
8	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	6.051	0	10.000	9,00	-10	
9		P <sub>2</sub>	1.000	1.000	10.000	21,00	-50	
10		Produção (t)	7.051	1.000	10.000			
11		Ocupação (h)	720	0	720			
12	Cliente	P <sub>1</sub>	8.818	0	10.000		100	
13		P <sub>2</sub>	2.000	0	2.000		200	
14		Total	10.818	0	12.000			
15	Lucro (Margem*Produção-Custo de Complexidade) R\$							1.171.295

Figura 5.6 – Planilha de produção no Exemplo 4. Os produtos  $P_1$  e  $P_2$  nos processando nos equipamentos  $E_1$  e  $E_2$ , agregando as linhas 7 e 8 com ocupação horária dos equipamentos.

Outro fator que influencia a capacidade produtiva do equipamento é o quanto do equipamento está disponível para a efetiva produção. A este percentual de disponibilidade é dado o nome de *índice de funcionamento* (IF). O IF é calculado subtraindo-se do tempo calendário os tempos de preparação, de ajustes de produção, paradas corretivas e paradas preventivas e dividindo-se pelo tempo calendário (Suzuki, 1994).

Considerando, por exemplo, um mês de 30 dias e com regime 24 horas de trabalho tem-se a disponibilidade de 720 horas. Fixando 24 horas de parada no período para manutenção preventiva do equipamento e a soma de 48 horas de paradas de preparação entre processamento de produtos diferentes (setup), tem-se o seguinte índice de funcionamento (IF):

$$IF = \frac{(720 - (24 + 48))}{720} = 90\% \quad (5.6)$$

O Índice de Funcionamento (IF) pode ser computado no modelo de duas formas distintas: i) reduzindo-se o tempo disponível do equipamento para 648 horas ( $720 * 90\%$ ) ou ii) reduzindo-se a produtividade do processamento em 90%. Na segunda forma, tem-se uma diluição das paradas ao longo do período e mantém-se o tempo calendário. Para a modelagem proposta, foi utilizada a segunda forma conforme pode ser visto no Exemplo 5.

### Exemplo 5

Foi incluída uma coluna (\$G) para a entrada das informações de índice de funcionamento (Figura 5.7). Os índices de funcionamentos serão considerados nas fórmulas de ocupação horária de cada equipamento. Para o IF de 90%, por exemplo, tem-se 90% do tempo destinado à produção e 10% do tempo de parada do equipamento. Com essa redução de tempo destinado à produção, o atendimento ao pedido do cliente também reduz. Verifica-se que o lucro máximo atingido (célula \$H\$15) foi 8% a menor do que o lucro do passo anterior. Isso ocorre devido à aplicação dos índices de funcionamentos dos equipamentos E1 e E2 de 90% (Coluna \$G da Figura 5.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	<b>Balanceamento de Linha</b>								
2									
3	Equipamento	Produto	Quantidade Produzida (t)	Limite Inferior LI	Limite Superior LS	Produtividade t/hora	Índice de Funcionamento	Margem & Custo (R\$/t)	
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	2.407	0	4.000	5,00	90,0%		
5		P <sub>2</sub>	1.000	0	8.000	6,00	90,0%		
6		Produção (t)	3.407	0	8.000				
7		Ocupação (h)	720	0	720				
8	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	5.403	0	10.000	9,00	90,0%	-10	
9		P <sub>2</sub>	1.000	1.000	10.000	21,00	90,0%	-50	
10		Produção (t)	6.403	1.000	10.000				
11		Ocupação (h)	720	0	720				
12	Cliente	P <sub>1</sub>	7.810	0	10.000			100	
13		P <sub>2</sub>	2.000	0	2.000			200	
14		Total	9.810	0	12.000				
15	Lucro (Margem*Produção-Custo de Complexidade) R\$								1.076.975

Figura 5.7 – Planilha de produção no Exemplo 5.

Os produtos P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> processando nos equipamentos E<sub>1</sub> e E<sub>2</sub>, agregando o índice de funcionamento.

O índice de funcionamento reduz a capacidade produtiva do equipamento, resultando em maior consumo de horas para a produção.

A equação (5.5), considerando  $if_i$  como sendo o índice de funcionamento do equipamento quando se processa o produto  $x_i$ , é reescrita como sendo:

$$\sum_{i=a}^b x_i / (prod_i * if_i) \leq LS_a \quad (5.7)$$

#### 5.4 Rendimento físico do produto

Suponha o fluxo do produto P<sub>1</sub> em que o mesmo é processado sequencialmente pelos equipamentos E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> e E<sub>3</sub> (Figura 5.8). Durante o processamento nesses equipamentos ocorrem perdas de material (massa) devido a cortes de defeitos e descartes, o que resulta no rendimento do material ( $\eta$ ).

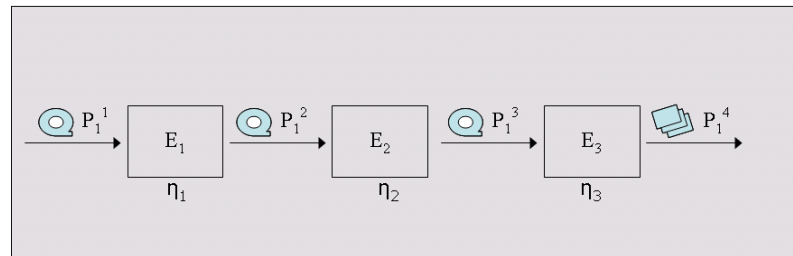


Figura 5.8 Aplicação do rendimento no fluxo de produção do produto  $P_1$ .

O rendimento  $\eta_1$  do produto  $P_1$  no equipamento  $E_1$  é dado por:

$$\eta_1 = P_1^2 / P_1^1, \quad (5.8)$$

ou seja, o rendimento do produto em um determinado equipamento é relação do peso que sai pelo peso que entra nesse equipamento.

Sejam  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  (Figura 5.9) as quantidades do produto  $P_1$  processadas nos equipamentos  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  e produto acabado, respectivamente. Considerando-se que toda produção  $x_1$  do produto  $P_1$  seja transformado em produto acabado e entregue à expedição, têm-se as seguintes relações:

$$x_1 = \frac{x_2}{\eta_1}, \quad x_2 = \frac{x_3}{\eta_2} \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{x_4}{\eta_3} \quad (5.9)$$

Dessa forma, ao se determinar o valor de  $x_4$  que é o produto entregue ao cliente, têm-se todas as quantidades  $x_i$  do fluxo produtivo.

### Exemplo 6

Suponha que o produto ao sair do equipamento  $E_1$  ou  $E_2$  tenha um processamento de acabamento para atendimento ao cliente que reduz o seu peso. A redução de peso (ou rendimento físico) considerado foi de 95% e 91% para  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. A planilha anterior foi alterada, incluindo uma coluna (\$H) para conter o rendimento físico do produto na fase (Figura 5.9). Dessa forma, o produto  $P_1$  deverá ser processado nos equipamentos  $E_1$  e  $E_2$  (células \$C\$4 e C\$8) na quantidade tal que a soma seja igual à quantidade entregue ao cliente (célula \$C\$12) dividida pelo

rendimento na fase de 95% (célula \$H\$12). A mesma consideração deve ser feita para o produto  $P_2$  em que o rendimento de 90% deve se aplicado à produção dos equipamentos  $E_1$  e  $E_2$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Balanceamento de Linha</b>								
2									
3	Equipamento	Produto	Quantidade Produzida (t)	Limite Inferior LI	Limite Superior LS	Produtividade t/hora	Índice de Funcionamento	Rendimento	Margem & Custo (R\$/t)
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	2.407	0	4.000	5,00	90,0%	90,0%	
5		P <sub>2</sub>	1.000	0	8.000	6,00	90,0%	90,0%	
6		Produção (t)	3.407	0	8.000				
7		Ocupação (h)	720	0	720				
8	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	5.403	0	10.000	9,00	90,0%	90,0%	-10
9		P <sub>2</sub>	1.000	1.000	10.000	21,00	90,0%	90,0%	-50
10		Produção (t)	6.403	1.000	10.000				
11		Ocupação (h)	720	0	720				
12	Cliente	P <sub>1</sub>	7.420	0	10.000			95,0%	100
13		P <sub>2</sub>	1.820	0	2.000			91,0%	200
14		Total	9.240	0	12.000				
15	Lucro (Margem*Produção-Custo de Complexidade) R\$								1.001.925

Figura 5.9 – Planilha de produção no Exemplo 6.

Os produtos  $P_1$  e  $P_2$  processando nos equipamentos  $E_1$  e  $E_2$ , agregando o rendimento físico.

O rendimento físico é a contabilização das perdas de massa durante o processamento em um equipamento. A massa que entra é a massa que sai do equipamento mais a massa das perdas. O valor do rendimento físico é definido em função do equipamento, tipo de aço e dimensão do produto.

No caso da siderurgia, o rendimento físico é um fator importante para o balanceamento de linha. Se considerar do início da linha de produção até a entrega ao cliente, o rendimento físico pode variar de 70% a quase 100% em função do produto. Essa variação pode gerar grande impacto no balanço massa e consequentemente na ocupação dos equipamentos.

A planilha da Figura 5.9 resulta no modelo de programação linear que pode ser representado na seguinte forma matemática:

$$\text{Maximizar } z = (100 - 0)x_1 + (200 - 0)x_2 + (100 - 10)x_3 + (200 - 50)x_4 \quad (5.10)$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 4000$$

$$x_2 \leq 8000$$

$$x_1 + x_2 \leq 8000$$

$$0,22x_1 + 0,19x_2 \leq 720$$

$$x_3 \leq 10000$$

$$x_4 \leq 10000$$

$$x_3 + x_4 \leq 10000$$

$$0,12x_3 + 0,05x_4 \leq 720$$

$$-x_4 \leq -1000$$

$$-x_3 - x_4 \leq -1000$$

$$0,95x_1 + 0,95x_3 \leq 10000$$

$$0,91x_2 + 91x_4 \leq 2000$$

$$-0,95x_1 - 0,95x_3 \leq 0$$

$$-0,91x_2 - 0,91x_4 \leq 0$$

$$x_i \geq 0, \text{ para } j = 1, 2, \dots, 4$$

Genericamente, o modelo geral para um único período será:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^p c_j x_j + \sum_{j=p+1}^n c_j x_j \quad (\text{Função objetivo – Equação 5.2})$$

$$x_i \leq b_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{restrições de limitação máxima por tipo de aço – Equação 5.3})$$

$$x_i \geq b_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{restrições de limitação mínima por tipo de aço – Equação 5.4})$$

$$\sum_{i=a}^b x_i / (\text{prod}_i * \text{if}_i) \leq LS_a \quad (\text{restrições decapacidade dos equipamentos – Equação 5.7})$$

A maioria dos aplicativos de programação matemática tem como entrada o modelo descrito na forma matemática conforme exemplo acima (equação 5.10). Para se utilizar essas ferramentas é necessária a interpretação das fórmulas da planilha convertendo para o formato matemático. Os dados operacionais, tais com produtividade, rendimento,

limites inferiores e superiores são todos parametrizados. Isso pode formar equações redundantes. Essas equações não inviabilizam o modelo, mas, ao aumentar desnecessariamente o número de restrições, pode tornar mais lenta a sua solução por um otimizador.

Esse modelo também ainda pode ser escrito na forma matricial:

$$c = [100 \quad 200 \quad 90 \quad 150]; \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0,22 & 0,19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,12 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0,95 & 0 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0,91 & 0 & 0,91 \\ -0,95 & 0 & -0,95 & 0 \\ 0 & -0,91 & 0 & -0,91 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 4000 \\ 8000 \\ 8000 \\ 720 \\ 10000 \\ 10000 \\ 10000 \\ 720 \\ -1000 \\ -1000 \\ 10000 \\ 2000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com o modelo resultante na notação matricial:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } cx^T \\ \text{S. a } & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

## 5.5 Modelagem de estoque intermediário

Até este ponto, foi visto a modelagem do balanceamento de linha em que toda a produção entregue aos clientes era processada em um único período, em todos os equipamentos envolvidos.

Uma das características da indústria siderúrgica é a presença de estoques tanto de produto em elaboração quanto de produto acabado (Figura 5.11). Esses estoques visam garantir: atendimento ao cliente, sequenciamento da produção, continuidade operacional, viabilizar paradas de equipamentos. É importante a consideração dos estoques no PPV tanto pela possibilidade de variação na capacidade de entrega no horizonte de planejamento quanto no custo adicional de se manter o estoque.



Figura 5.10 – Foto do estoque de produto em elaboração de bobinas laminadas a frio.

Fonte: site da empresa

Os estoques entre um equipamento e outro são denominados estoques de produto em elaboração (PE). Esses estoques pertencem ao equipamento que irá processá-lo, seguindo o fluxo produtivo. O que se deseja nesta seção é modelar o



balanceamento de linha considerando a quantidade  $x_i$  de um produto  $P_i$  sendo processado a partir de estoques e para estoques.

### Exemplo 7

Para ilustrar a modelagem do estoque, modificou-se o fluxo de produção dos produtos  $P_1$  e  $P_2$  conforme Figura 5.12. O equipamento  $E_1$  processa os produtos ( $P_1$  ou  $P_2$ ), armazena no estoque PE do equipamento  $E_2$ . O equipamento  $E_2$  retira o produto do estoque PE, processa e armazena no estoque de produto acabado (Estoque PA). O cliente final é atendido com o produto do estoque PA.

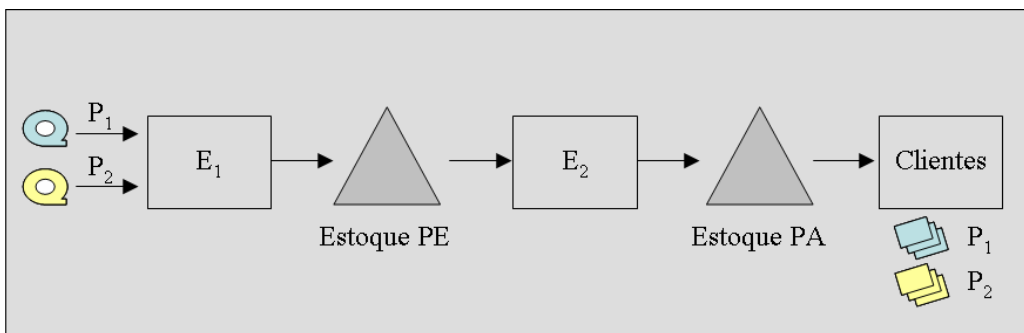


Figura 5.11– Fluxo de Produção com estoque PE e PA.

As formulações para o estoque foram incluídas nas linhas 8 a 10 e linhas 15 a 17 para conter o estoque PE e estoque PA respectivamente (Figura 5.13).

A fórmula “ $=\$C\$4-\$C\$11/\$H\$11$ ” foi incluída na célula  $\$C\$8$  (Figura 5.13) para apontar o estoque PE do produto  $P_1$  no equipamento  $E_1$ . Dessa forma, o estoque do produto  $P_1$  será a quantidade produzida do produto  $P_1$  no equipamento  $E_1$  (célula  $\$C\$4$ ) menos a quantidade de  $P_1$  processada no equipamento  $E_2$  (célula  $\$C\$11$ ) dividido pelo rendimento físico ( $\$H\$11$ ), ou seja, a quantidade que sai do equipamento é a quantidade que entra menos as perdas do processo definidas pelo rendimento físico.

Os estoques também estão limitados ao Limite Inferior (coluna  $\$E$ ) e ao Limite Superior (Coluna  $\$F$ ). Assim é possível definir o volume de estoque desejado ou o volume de estoque aceitável para cada produto.

Com a formulação do estoque, é possível incluir o custo financeiro do estoque na função objetivo. Esse custo financeiro é a aplicação de uma taxa de juros sobre o custo de uma tonelada do produto até a fase de produção em que se encontra, quando este

permanece em estoque no final e cada período de planejamento. Como exemplo, tem-se que o custo de produção até o equipamento E<sub>1</sub> de R\$ 130/t e uma taxa de juros de 1% a.m.. O produto P<sub>1</sub> terá um custo financeiro de estoque de R\$ 1,30 a cada tonelada que permaneça no estoque PE (célula \$J\$8 na Figura 5.5.3). Apesar da incidência desse custo, a política de estocagem se justifica pela a margem que estes produtos estocados podem propiciar nos períodos subsequentes.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	<b>Balaceamento de Linha</b>									
2										
3	Equipamento	Produto	Quantidade Produzida (t)	Limite Inferior LI	Limite Superior LS	Produtividade t/hora	Índice de Funcionamento	Rendimento	Margem & Custo (R\$/t)	
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	6.004	0	10.000	12,00	90,0%	90,0%		
5		P <sub>2</sub>	1.163	0	8.000	10,00	90,0%	90,0%		
6		Produção (t)	7.167	0	8.000					
7		Ocupação (h)	685	0	720					
8	Estoque PE	P <sub>1</sub>	0	0	4.000				-1,30	
9		P <sub>2</sub>	0	0	8.000				-2,00	
10		Total	0	0	8.000					
11	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	5.403	0	10.000	9,00	90,0%	90,0%	-10,00	
12		P <sub>2</sub>	1.000	1.000	10.000	21,00	90,0%	86,0%	-50,00	
13		Produção (t)	6.403	1.000	10.000					
14		Ocupação (h)	720	0	720					
15	Estoque PA	P <sub>1</sub>	0	0	10.000				-1,60	
16		P <sub>2</sub>	200	0	2.000				-2,40	
17		Total	200	0	12.000					
18	Cliente	P <sub>1</sub>	5.403	0	8.000			100,0%	100,00	
19		P <sub>2</sub>	800	0	800			100,0%	200,00	
20		Total	6.203	0	8.800					
21	Lucro (Margem*Produção-Custo de Complexidade) R\$									595.829

Figura 5.12 Planilha de produção no Exemplo 7.

Inclusão de fórmulas para estoque de produto em elaboração (PE) e estoque de produto acabado (PA).

O estoque de 200t do produto P2 da célula C16 diminui o lucro da empresa em R\$ 480. Esse é o custo incorrido para garantir, por exemplo, um lote mínimo de 1.000t do produto P2 no equipamento E2.

O problema de balanceamento de linha com estoques intermediários foi modelado na ferramenta Solver do Excel (Figura 5.14). O problema foi modelado com: (2 equipamentos x 2 produtos por equipamento + 2 produtos para clientes) \* 1 período de planejamento) resultando em 6 variáveis. Têm-se as restrições para: ( 6 variáveis + 2 produtos em estoque PE + 2 produtos em estoque PA + 1 total de produção x 2 equipamentos + 1 total de ocupações x 2 equipamentos + 1 total de entrega ao cliente

+ 1 total de estoque PE + 1 total de estoque PA) x 2 (limite mínimo e máximo) resultando em 34 restrições.

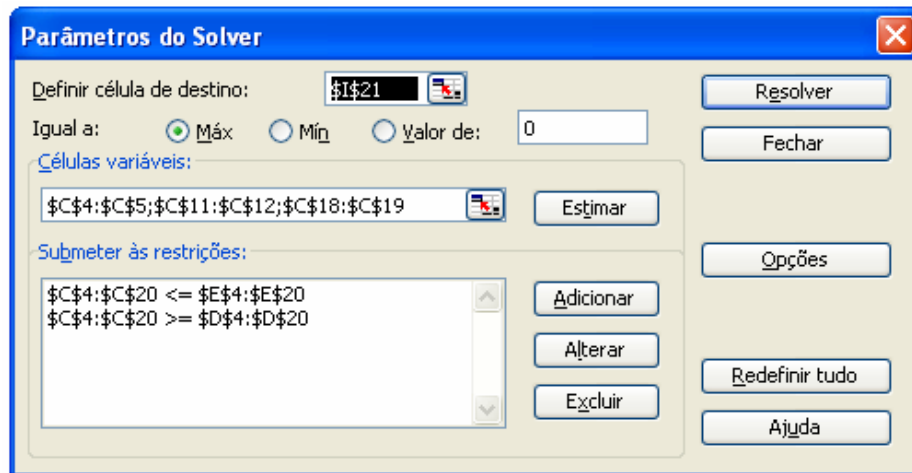


Figura 5.13 Caixa de diálogo da ferramenta Solver do Excel

A matriz  $A$  de coeficientes tecnológicos, correspondente ao modelo, tem a dimensão de  $34 \times 6$ , o vetor de restrições  $b$  tem a dimensão  $34 \times 1$  e o vetor coeficientes da função objetivo  $c$  tem a dimensão  $1 \times 6$ .

As inequações referentes às restrições de mínimo e de máximo do estoque de produto em elaboração no equipamento  $E_2$  do Exemplo 7 são estruturadas da seguinte forma:

$$x_1 - 1,11x_3 \leq 4000$$

$$x_2 - 1,16x_4 \leq 8000$$

$$x_1 + x_2 - 1,11x_3 - 1,16x_4 \leq 8000$$

$$-x_1 + 1,11x_3 \leq 0$$

$$-x_2 + 1,16x_4 \leq 0$$

$$-x_1 - x_2 + 1,11x_3 + 1,16x_4 \leq 0$$

As inequações referentes às restrições de mínimo e de máximo do estoque de produto acabado, considerando-se o rendimento de 100%, são estruturadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x_3 - x_5 &\leq 10000 \\
x_4 - x_6 &\leq 2000 \\
x_3 + x_4 - x_5 - x_6 &\leq 1200 \\
-x_3 + x_5 &\leq 0 \\
-x_4 + x_6 &\leq 0 \\
-x_3 - x_4 + x_5 + x_6 &\leq 0
\end{aligned}$$

O equipamento  $E_2$  utilizou, nesse exemplo, as 720 horas disponíveis enquanto o equipamento  $E_1$  ficou ocioso por 35 horas neste período de planejamento. Nesse contexto o equipamento  $E_2$  é considerado o gargalo do sistema. As ações sobre as condições operacionais desse equipamento são no sentido de garantir o atendimento da entrega de pedidos planejada e de busca de nivelamento de capacidade com os demais equipamentos.

Genericamente, as restrições de estoque podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sum_{i=a}^b x_i - \sum_{j=c}^d x_j / \eta_j \leq LS_s \quad (5.12)$$

em que:

$x_i$  é a quantidade produzida do produto  $i$  em todos os equipamentos que abastece o estoque do produto em elaboração ou acabado  $s$ ;

$x_j$  é a quantidades produzida do produto  $j$  em todos os equipamentos que consome o estoque do produto em elaboração ou acabado  $s$ ;

$\eta_j$  é o rendimento do produto  $j$  em todos os equipamentos em que é processado;

$LS_s$  é o limite superior ou máximo admitido em estoque para o produto  $s$ .

### Exemplo 8

Considere o modelo que armazena a produção em estoques intermediários com estoque inicial de produto em elaboração (PE) no equipamento  $E_2$  para os dois tipos de produtos ( $P_1$  e  $P_2$ ) e estoque inicial de produto acabado (PA) para atendimento a pedido. Para isso foi incluído uma coluna para conter o estoque inicial dos estoques PE e PA (coluna \$C da Figura 5.14). A fórmula de estoque na célula \$D\$8 passa a ser

=C8+D4-D11/\$I11, onde  $C8$  é o valor do estoque inicial de  $P_1$  no estoque PE do equipamento  $E_2$ .

O equipamento  $E_2$  da Figura 5.14 continua sendo o gargalo, mas a produção entregue ao cliente foi maior do que no exemplo anterior devido à utilização dos estoques tanto PE quanto PA.

O equipamento  $E_1$  ficou mais ocioso (720 horas disponíveis – 652 horas utilizadas = 68 horas ociosas) devido a política adotada no modelo de minimizar o custo financeiro de estoques.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>Balanceamento de Linha</b>									
2										
3	Equipamento	Produto	Estoque Inicial	Quantidade Produzida (t)	Limite Inferior LI	Limite Superior LS	Produtividade t/hora	Índice de Funcionamento	Rendimento	Margem & Custo (R\$/t)
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>		6.004	0	10.000	12,00	90,0%	90,0%	
5		P <sub>2</sub>		863	0	8.000	10,00	90,0%	90,0%	
6		Produção (t)		6.867	0	8.000				
7		Ocupação (h)		652	0	720				
8	Estoque PE	P <sub>1</sub>	0	0	0	4.000				-1,30
9		P <sub>2</sub>	300	0	0	8.000				-2,00
10		Total	300	0	0	8.000				
11	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>		5.403	0	10.000	9,00	90,0%	90,0%	-10,00
12		P <sub>2</sub>		1.000	1.000	10.000	21,00	90,0%	86,0%	-50,00
13		Produção (t)		6.403	1.000	10.000				
14		Ocupação (h)		720	0	720				
15	Estoque PA	P <sub>1</sub>	1000	0	0	10.000				-1,60
16		P <sub>2</sub>	0	200	0	2.000				-2,40
17		Total	1000	200	0	12.000				
18	Cliente	P <sub>1</sub>		6.403	0	8.000			100,0%	100,00
19		P <sub>2</sub>		800	0	800			100,0%	200,00
20		Total		7.203	0	8.800				
21	Lucro (Margem*Produção-Custo de Complexidade) R\$									695.829

Figura 5.14 Planilha de produção no Exemplo 8.

Inclusão de fórmulas para estoque de produto em elaboração (PE) e estoque de produto acabado (PA) com os respectivos estoques iniciais.

Com esta abordagem, o estoque intermediário de produto em elaboração será o resultante do estoque inicial, acrescido da produção do equipamento anterior menos a produção do corrente equipamento com a aplicação do rendimento físico no produto em questão dentro de um período de planejamento. Um estoque de um produto pode ser abastecido por mais de um equipamento, assim como o produto de um determinado estoque pode destinar a mais de um equipamento. Essa forma de relacionamento, flexibiliza a montagem do modelo matemático.

O planejamento de um único período é útil para se definir a estratégia operacional da empresa, uma vez que se torna conhecida a capacidade produtiva da planta para um determinado mix de produção. A estratégia operacional pode conter: i) esforços de vendas para migrar o mercado para produtos de melhor margem horária; ii) estabelecer metas e conceber projetos para reduzir custos de produção; iii) melhorar os coeficientes tecnológicos (índice de funcionamento e produtividade) nos equipamentos gargalos e/ou iv) melhorar o rendimento físico.

O planejamento de um único período possibilita a análise de substituição de produtos em relação à margem total e à capacidade de produção.

## **5.6 Modelagem em multiperíodos**

Para o problema de planejamento da produção para vários períodos e considerando a evolução dos estoques é possível desenvolver um modelo de programação linear para determinar a programação ótima de produção, podendo produzir mais do que o necessário em determinado mês e reter as unidades excedentes para entregar em meses posteriores (Taha, 2008). Sendo possível estocar produto em elaboração em excesso de um período ao seguinte, o problema é verdadeiramente dinâmico (Wagner, 1986). Este modelo não se decompõe completamente em modelos separados de otimização período por período.

Considerar na função objetivo o volume e variação dos estoques leva a minimização do custo financeiro de se manter o estoque ao longo do horizonte de planejamento. As restrições consideradas para os estoques são:

- i) limites superiores definido pela área física e pelas diretrizes da empresa;
- ii) limite inferior ditado pela política de estoque considerando o estoque de segurança que garanta a continuidade operacional.

O estoque, no planejamento de produção, pode também contribuir com a função objetivo de maximizar o lucro abrindo a possibilidade de flutuação de capacidade produtiva. A produção de um equipamento em um determinado período pode ser processada ou entregue a clientes nos períodos futuros onde os equipamentos envolvidos podem não ter a mesma disponibilidade.

Será discutida nesta seção, a passagem de estoque intermediário de um período para o outro período subsequente, ou seja, modelagem em multiperíodos (Figura 5.16). O estoque resultante do período M passa a ser o estoque inicial para o período M + 1. Além do atendimento ao fluxo produtivo do período corrente, pode haver a passagem de estoque PE e/ou estoque PA) de um período para o outro período subsequente. O estoque resultante do período M passa a ser o estoque inicial para o período M + 1.

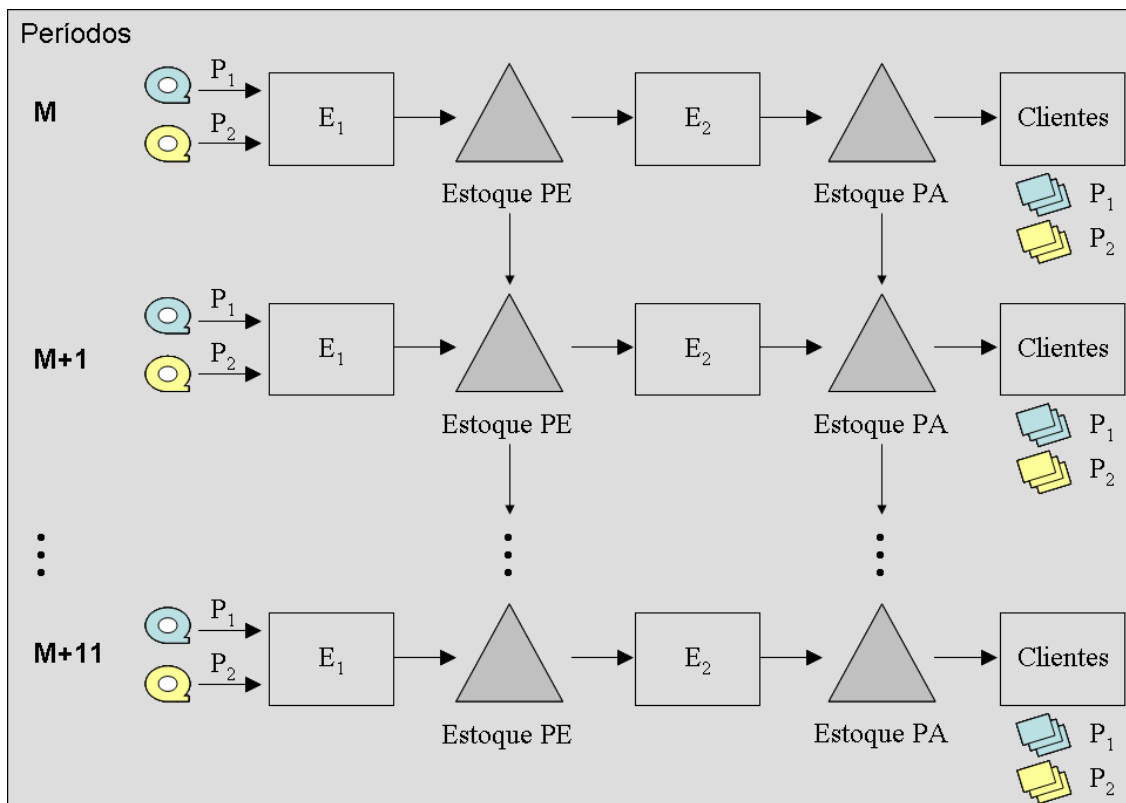


Figura 5.15 Planejamento Anual em multiperíodos.

Além do atendimento ao fluxo produtivo do período corrente, pode haver a passagem de estoque (PE e/ou PA) de um período para o outro período subsequente. O estoque resultante do período M passa a ser o estoque inicial para o período M + 1.

### Exemplo 9

Para distribuir a produção e maximizar o lucro total de uma fábrica que produz dois tipos de produto ( $P_1$  e  $P_2$ ) utilizando-se de equipamentos  $E_1$  e  $E_2$  em 3 períodos consecutivos (Figura 5.16).

O equipamento  $E_1$  processa o produto e armazena no Estoque PE. Os produtos deste estoque são utilizados pelo equipamento  $E_2$  no período corrente ou passa para o

próximo período como estoque inicial do equipamento E<sub>2</sub>. O cliente é atendido com o produto armazenado em estoque PA.

A planilha foi alterada, incluindo-se colunas para conter a produção, estoque, ocupação do período M+1 e M+2 (colunas \$E e \$F) similar à coluna \$D com as informações do período M.

O estoque inicial no período M+1 passa a ser o estoque do período M. Assim, a fórmula do estoque se mantém para todos os períodos. Ou seja, a fórmula de estoque na célula \$D\$8 (=C8+D4-D11/\$K11) é copiada para as células \$E e \$F.

A função objetivo (célula \$L\$21 da Figura 5.17) passa a ser o somatório das funções objetivo dos 3 períodos e é dado pela seguinte fórmula:

$$=SOMARPRODUTO(D4:D19; \$L\$4:\$L\$19)+ \\ SOMARPRODUTO(E4:E19; \$L\$4:\$L\$19)+ \\ SOMARPRODUTO(F4:F19; \$L\$4:\$L\$19)$$

A Figura 5.16 mostra o equipamento E<sub>2</sub> com ocupação máxima nos três períodos (células \$D\$14, \$E\$14 e \$F\$14) e as oscilações nas quantidades entregue ao cliente (células \$D\$20, \$E\$20 e \$F\$20) se devem ao uso e armazenamento de produto nos estoques PA.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>Balaceamento de Linha</b>											
2												
3	Equipamento	Produto	Estoque Inicial	M	M+1	M+2	Limite Inferior	Limite Superior	Produt. t/hora	Índice de Func.	Rendimento	Margem & Custo (R\$/t)
4	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>		6.004	6.004	6.004	0	10.000	12,00	90,0%	90,0%	
5		P <sub>2</sub>		863	1.163	1.163	0	8.000	10,00	90,0%	90,0%	
6		Produção (t)		6.867	7.167	7.167	0	8.000				
7		Ocupação (h)		652	685	685	0	720				
8	Estoque PE	P <sub>1</sub>	0	0	0	0	0	4.000				-1,30
9		P <sub>2</sub>	300	0	0	0	0	8.000				-2,00
10		Total	300	0	0	0	0	8.000				
11	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>		5.403	5.403	5.403	0	10.000	9,00	90,0%	90,0%	-10,00
12		P <sub>2</sub>		1.000	1.000	1.000	1.000	10.000	21,00	90,0%	86,0%	-50,00
13		Produção (t)		6.403	6.403	6.403	1.000	10.000				
14		Ocupação (h)		720	720	720	0	720				
15	Estoque PA	P <sub>1</sub>	1000	0	0	0	0	10.000				-1,60
16		P <sub>2</sub>	0	200	400	600	0	2.000				-2,40
17		Total	1000	200	400	600	0	12.000				
18	Cliente	P <sub>1</sub>		6.403	5.403	5.403	0	8.000			100,0%	100,00
19		P <sub>2</sub>		800	800	800	0	800			100,0%	200,00
20		Total		7.203	6.203	6.203	0	8.800				
21	Lucro (Margem*Produção-Custo de Complezidade) R\$											1.886.046

Figura 5.16 Planilha de Planejamento em Multiperíodos.

Foram considerados três períodos de planejamento: M, M+1 e M+2.



Na planilha da Figura 5.17, considerou-se os mesmos parâmetros operacionais em todos os períodos para efeito de simplificação. Na modelagem proposta, os parâmetros: limite inferior, limite superior, produtividade, índice de funcionamento e rendimento são todos individualizados por período de planejamento. Desta forma o equipamento  $E_2$  poderia, por exemplo, ter o limite superior de horas disponíveis de: 744, 672, 744 e 720 horas para representar os meses de janeiro, fevereiro, março e abril respectivamente.

A equação 5.13 mostra a função objetivo do planejamento de 12 períodos passa a ser o somatório dos lucros individuais de cada período caso seja tratado como modelo único.

$$\text{Maximizar } z = \sum_{s=1}^{12} \left( \sum_{j=1}^p c_{sj} x_{sj} + \sum_{j=p+1}^n c_{sj} x_{sj} \right) \quad (5.13)$$

A modelagem em multiperíodos possibilita duas abordagens distintas: a primeira abordagem é conjunto de vários modelos lineares (12 modelos) onde o estoque inicial do período  $s$  é o estoque final da solução problema do período anterior  $s-1$ . Nesta abordagem, o planejador define qual produto e qual volume deverá permanecer em estoque.

A segunda abordagem é o processamento de um único modelo linear que contempla todos os períodos de planejamento. Dessa forma, o modelo se torna bem maior que o anterior. O número de variáveis é multiplicado pelo número de períodos, assim como o número de restrições. Nesta abordagem o nível de estoque é o ótimo entre produzir em determinados períodos, estocar e expedir em períodos subsequentes.

A Figura 5.17 a) mostra a variação mensal no volume de estoque para produto em elaboração e a Figura 5.17 b) mostra a variação mensal no volume de produto acabado, ambos no modelo único de 12 períodos. A otimização considerou as capacidades ociosas de alguns períodos para aumentar a capacidade produtiva do planejamento total.

Comparando as duas abordagens tem-se o custo e o benefício gerados pela política de estoque adotada pela empresa.

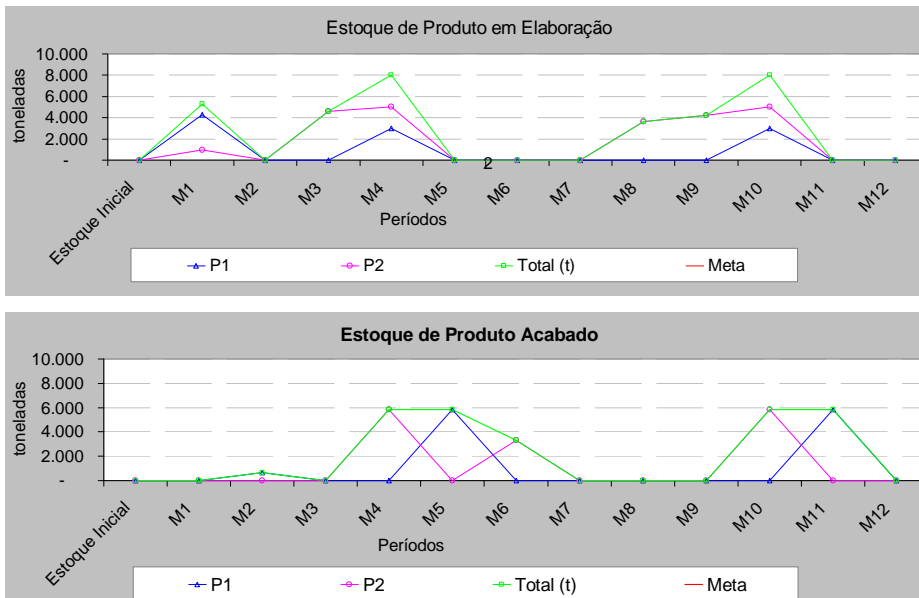


Figura 5.17 a) Estoque de Produto em Elaboração e b) Estoque de Produto Acabado

É possível a implementação da primeira abordagem, ou seja, otimização mês a mês, utilizando-se da ferramenta Solver contida originalmente no Excel. Porém o segundo caso resulta em um modelo de dimensão não suportada pela ferramenta. Todavia, o Solver pode trabalhar apenas com problemas pequenos de programação linear (200 variáveis, de acordo com o help on-line do Excel 2003).

Esta limitação levou à necessidade de buscar uma nova ferramenta. A opção adotada foi a utilização do Solver Premium V3.5 (Figura 5.19). Essa ferramenta foi desenvolvida pela Fontline Systems que é o mesmo fornecedor do Solver original do Excel e pode ser pesquisado no site [www.fontsys.com](http://www.fontsys.com). Essa versão mantém a mesma sistemática de modelagem com capacidade de processamento de até 10.000 variáveis.

## 5.7 Processamento do plano de produção

Com o propósito de melhorar continuamente o processo, foi desenvolvida uma ferramenta para otimizar o PPV com base em rotinas de melhor desempenho e mais robustas.

A implementação computacional foi realizada em Visual Basic Application (VBA) integrando uma ferramenta de modelagem matemática Ipsolve 5.5 à planilha Excel®. O

Ipsolve, cuja licença é pública, foi desenvolvida por Michel Berkelaar, Kjell Eikland e Peter Notebaert em 2004. No Apêndice B é apresentado um relato das características da biblioteca Ipsolve assim como exemplos básicos de implementação.

O modelo matemático foi construído por meio de fórmulas de planilha eletrônica assim como a entrada dos parâmetros operacionais (Figura 5.19). Detalhes da estruturação do otimizador são apresentados no Apêndice A.

A rotina em VBA, partindo do modelo matemático em Excel, gera o modelo na forma algébrica na memória ou em arquivo. Esse modelo na forma algébrica é processado pela rotina de otimização Ipsolve e os resultados retornam à planilha para elaboração de relatório e análise dos resultados (Figura 5.18).

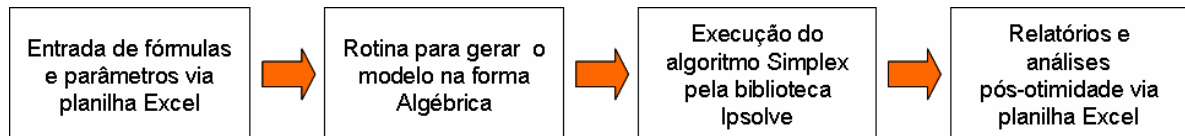


Figura 5.18 Fluxo de execução da otimização do PPV com a rotina Ipsolve.

Neste trabalho, optou-se por utilizar a rotina Ipsolve, mas o modelo na forma algébrica pode ser processado por qualquer software de otimização tais como: Cplex, Xpress, Matlab, Lindo e outros.

O modelo manteve as características dos modelos anteriores:

1. A ocupação dos equipamentos se dá em função da produtividade e índice de funcionamento.
2. O balanço de massa se dá em função do rendimento e do estoque de entrada e saída.
3. Cada produto a produzir tem uma margem que pode variar a cada mês.
4. O fluxo produtivo é definido por equações de planilha.
5. Pode-se definir mínimo e máximo para a produção de um determinado aço em um equipamento, assim como mínimo e máximo para: horas ocupadas, produção total do equipamento, estoque por aço, estoque total no equipamento.
6. A carteira de produtos (Plano de Vendas) é definida com o mínimo e máximo a produzir de cada produto acabado.

7. Os produtos em elaboração e acabados em estoque são custeados pela taxa de juros aplicada sobre custo do produto até a fase em que se encontra.
8. O custo da complexidade é simulado agregando custo adicional a fluxos alternativos.

A		B		C		D		E		F		G		H		I		J		K		L		M		N		O	
Função Objetivo: Maximizar Lucro		<b>BALANCEAMENTO DE LINHA</b>																											
		395,0 MR\$ / ano												283,6 kt / ano						PL Anual		PL Mês a Mês		Zerar Variáveis					
Solução Ótima Encontrada		Estoque Inicial	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>5</sub>	M <sub>6</sub>	M <sub>7</sub>	M <sub>8</sub>	M <sub>9</sub>	M <sub>10</sub>	M <sub>11</sub>	M <sub>12</sub>															
E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>		21.393	19.170	-	17.249	14.396	15.977	-	19.110	10.651	18.110	14.396	5.326															
	P <sub>2</sub>		15.401	-	23.957	17.824	4.034	14.803	19.385	15.010	23.399	18.175	4.034	11.396															
	Total (t)		36.794	19.170	23.957	35.072	18.430	30.781	19.385	34.120	34.050	36.286	18.430	16.722															
	Ocupação (h)		744	360	532	720	360	629	431	692	720	744	360	353															
Estoque E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	-	4.299	0	0	3.000	0	0	0	0	0	3.000	0	0															
	P <sub>2</sub>	-	981	0	4.572	5.000	0	0	0	3.614	4.221	5.000	0	0															
	Total (t)	-	5.280	0	4.572	8.000	0	0	0	3.614	4.221	8.000	0	0															
E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>		16.667	22.883	-	13.893	16.961	15.578	0	18.633	10.385	14.733	16.961	5.193															
	P <sub>2</sub>		14.060	956	18.900	16.961	8.808	14.433	18.900	11.111	22.222	16.961	8.808	11.111															
	Total (t)		30.727	23.839	18.900	30.854	25.770	30.011	18.900	29.744	32.607	31.694	25.770	16.304															
	Ocupação (h)		744	672	360	720	652	720	360	744	720	744	652	360															
Produto Acabado	P <sub>1</sub>	-	0	660	0	0	5.850	0	0	0	0	0	5.850	0															
	P <sub>2</sub>	-	0	0	0	5.850	0	3.322	0	0	0	5.850	0	0															
	Total (t)	-	0	660	0	5.850	5.850	3.322	0	0	0	5.850	5.850	0															
À Produzir	P <sub>1</sub>		15.000	20.000	594	12.503	10.000	19.285	-	16.769	9.347	13.259	10.000	9.938															
	P <sub>2</sub>		12.654	860	17.010	10.000	13.193	10.000	20.000	10.000	20.000	10.000	13.193	10.000															
	Total (t)		27.654	20.860	17.604	22.503	23.193	29.285	20.000	26.769	29.347	23.259	23.193	19.938															

Figura 5.19 Planilha de interface do modelo matemático do Plano de Produção.

A rotina pode ser executada utilizando dois modelos distintos, com desempenho e resposta diferentes. Pode ser executado mês a mês, ou seja, o plano final é a soma de 12 otimizações e o estoque resultante do mês M é entrada do mês M+1. Pode ser executado Anual, ou seja, o plano é um modelo único. A diferença de valor alcançado na função objetivo do planejamento anual e do planejamento mês a mês mostra o potencial de melhoria desse planejamento.

Após executado, tem-se a solução ótima para entrega à expedição de todos os produtos distribuídos mês a mês caso ela atenda a todas as restrições de capacidade, volume de estoque, e de mercado (Figura 5.20).

É possível também, analisar qual equipamento ou conjunto de equipamentos que limitaram a produção, por meio da análise dos níveis de ocupação dos equipamentos envolvidos (Figura 5.21).

## PLANO DE PRODUÇÃO 2009 - ENTREGA A EXPEDIÇÃO

PRODUTO	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	TOTAL
<b>INOX TOTAL</b>	30.545	29.275	30.207	30.608	28.484	31.197	30.457	22.159	30.871	32.158	29.609	32.297	357.868
<b>LAMINADO A FRIO</b>	22.276	21.164	22.545	23.394	20.145	23.217	22.042	14.493	22.834	23.703	21.290	24.048	261.151
1ª Qualidade	21.162	20.105	21.418	22.224	19.138	22.056	20.940	13.768	21.693	22.518	20.226	22.845	248.093
MD	1.114	1.058	1.127	1.170	1.007	1.161	1.102	725	1.142	1.185	1.065	1.202	13.058
<b>BQB</b>	5.519	5.602	5.712	5.554	5.589	5.540	5.665	4.916	5.597	5.705	5.658	5.720	66.778
1ª Qualidade	5.354	5.434	5.541	5.387	5.422	5.374	5.495	4.769	5.429	5.534	5.489	5.548	64.774
MD	166	168	171	167	168	166	170	147	168	171	170	172	2.003
<b>BQP</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>PLACAS</b>													
<b>CG</b>	2.050	1.810	1.250	960	2.050	1.740	2.050	2.050	1.740	2.050	1.960	1.830	21.540
1ª Qualidade	1.948	1.720	1.188	912	1.948	1.653	1.948	1.948	1.653	1.948	1.862	1.739	20.463
MD	103	91	63	48	103	87	103	103	87	103	98	92	1.077
<b>PONTAS</b>	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700	8.400
<b>SILÍCIO TOTAL</b>	16.790	15.290	10.500	16.290	16.790	16.290	16.790	16.800	16.290	16.790	16.290	16.790	191.700
<b>SILÍCIO GO TOTAL</b>	7.440	6.940	7.300	7.240	7.440	7.240	7.440	7.450	7.240	7.440	7.240	7.440	87.850
<b>BF GO</b>	4.950	4.450	4.800	4.750	4.950	4.750	4.950	4.950	4.750	4.950	4.750	4.950	57.950
1ª Qualidade	4.690	4.207	4.545	4.497	4.690	4.497	4.690	4.689	4.497	4.690	4.497	4.690	54.875
MD	260	243	256	253	260	253	260	261	253	260	253	260	3.075
Pontas	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	480
<b>BQP GO</b>	2.490	2.490	2.500	2.490	2.490	2.490	2.490	2.500	2.490	2.490	2.490	2.490	29.900
<b>SILÍCIO GNO TOTAL</b>	9.350	8.350	3.200	9.050	9.350	9.050	9.350	9.350	9.050	9.350	9.050	9.350	103.850
P920 C0	4.950	4.950	1.800	4.950	4.950	4.950	4.950	4.950	4.950	4.950	4.950	4.950	56.250
P920 C4	3.000	2.000	0	2.700	3.000	2.700	3.000	3.000	2.700	3.000	2.700	3.000	30.800
P930	1.400	1.400	1.400	1.400	1.400	1.400	1.400	1.400	1.400	1.400	1.400	1.400	16.800
1ª Qualidade	9.210	8.225	3.152	8.914	9.210	8.914	9.210	9.210	8.914	9.210	8.914	9.210	102.292
MD	140	125	48	136	140	136	140	140	136	140	136	140	1.558
Pontas	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	480
<b>CARBONO TOTAL</b>	17.020	16.910	20.400	17.938	17.433	14.509	5.695	20.400	15.525	15.697	12.926	15.468	189.923
1ª Qualidade	16.509	16.403	19.788	17.400	16.910	14.074	5.524	19.788	15.059	15.226	12.539	15.004	184.225
MD	511	507	612	538	523	435	171	612	466	471	388	464	5.698
<b>TOTAL GERAL</b>	64.355	61.476	61.107	64.836	62.707	61.996	52.942	59.359	62.687	64.646	58.825	64.555	739.491

Figura 5.20 Resumo da entrega de produto acabado à expedição no Plano de Produção.

### Balancesamentos da linha

Orçamento X Capacidade

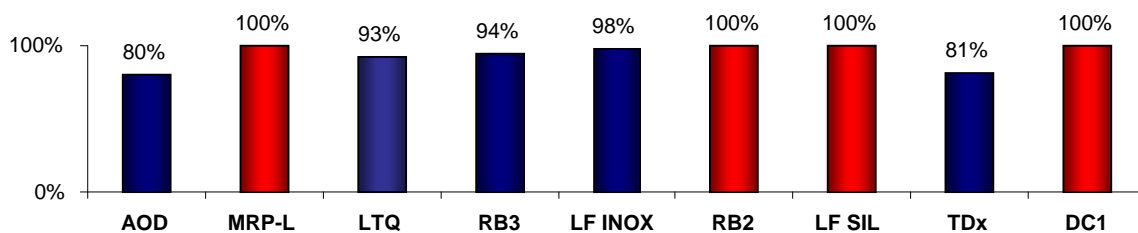


Figura 5.21 Taxa de ocupação dos equipamentos da linha de produção para o PPV proposto.

O modelo multiperíodo mantém todas as relações descritas para o modelo em um só período, porém a dimensão passa a ser  $s$  maior, onde  $s$  é o número de períodos do planejamento.

$$\text{Maximizar } z = \sum_{s=1}^{12} \left( \sum_{j=1}^p c_{sj} \cdot x_{sj} + \sum_{j=p+1}^n c_{sj} \cdot x_{sj} \right)$$

sujeito a:

$$\sum_{s=1}^{12} \left( \sum_{j=1}^n a_{sij} \cdot x_{sj} \right) \leq b_{si} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.14)$$

$$x_{sj} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad e \quad s = 1, 2, \dots, 12$$

em que:

$x$  é o vetor de variáveis com  $n$  componentes<sup>6</sup>, sendo a variável  $x_{sj}$  é a quantidade do produto  $j$  produzida em um determinado equipamento no período  $s$ ;

$c$  é o vetor de coeficientes da função objetivo  $z$  com  $n$  componentes; sendo que para os primeiros  $p$  elementos,  $c_{sj}$  é o lucro unitário do produto  $j$  produzido no período  $s$  e para os demais  $n - p$  elementos,  $c_{sj}$  é o custo de se produzir o produto  $j$  e de mate-lo em estoque no período  $s$ .

$A$  é a matriz de coeficientes tecnológicos com dimensão  $m \times n$ , e o elemento  $a_{ij}$  de cada período  $s$  será:

- no caso de restrição de estoque, igual a 1 quando o produto  $j$  for produzido para ser estocado no estoque  $i$  e será  $-1/\eta_j$  quando o produto  $j$  for produzido a partir do estoque  $i$ ;
- no caso de limitação de produção, igual a 1 quando o produto  $j$  for produzido no equipamento  $i$  e 0 caso contrário;
- No caso de ocupação do equipamento, igual a  $1/\text{prod}_j * \text{if}_j$  para todos os  $j$  produtos produzido no equipamento  $i$ ;

---

<sup>6</sup> O vetor  $x$ , com variáveis com  $n$  componentes é composto concatenando os vetores de variáveis de todos os períodos em um único vetor de dimensão  $n \times 1$ .

$b$  é o vetor de quantidade de recurso disponível com  $m$  componentes; o elemento  $b_i$  será:

- no caso de limitação de estoque, a quantidade máxima de estoque admitida do produto  $i$ ;
- no caso de limitação de produção, a quantidade máxima admitida de produção do produto  $i$ ;
- No caso de ocupação de equipamento, a quantidade de horas disponíveis do equipamento no período  $s$ ;

$n$  é o número de variáveis;

$m$  é o número de restrições;

$s$  é o número de períodos.

## 5.8 Análise dos resultados

Em 2002, diante da necessidade de maior agilidade e flexibilidade na elaboração do Plano de Produção e Vendas (PPV) a gerência de Melhoria Contínua e Qualidade da ArcelorMittal Inox Brasil desenvolveu um modelo de planejamento da produção contendo 140 variáveis e 748 restrições. O modelo foi desenvolvido em planilha Excel utilizando-se a ferramenta de otimização Solver original.

Esse modelo visava o balanceamento da produção a partir do processamento da matéria prima, na área denominada Redução, até o atendimento ao pedido do cliente (Expedição) passando por todas as fases de produção. Foram modelados 19 grupos de produtos na expedição, fluxo produtivo contendo 37 equipamentos e uma média de 6 grupos de produtos por equipamento (Figura 5.22). O horizonte de planejamento considerado foi de um ano em um único período.

O modelo de otimização do Solver Excel foi utilizado como ferramenta para apoio à decisão nas seguintes ocasiões:

- Elaboração dos Planos de Produção e vendas de 2002 à 2005, pela gerência de Planejamento e Controle da Produção da empresa.

- Em 2003, essa ferramenta foi utilizada para demonstrar o “Gap” entre a capacidade da época e a meta factível com o objetivo de identificar quais benefícios seriam alcançados com a melhoria de parâmetros operacionais.
- Utilizado em 2004 na concepção e implementação do projeto SPA (Sistema de Produção Acesita).
- Foi utilizado também, no Gerenciamento de Risco Operacional (GRO) priorizando-se investimentos para garantir a continuidade operacional em caso de acidentes e inoperância de equipamentos do fluxo produtivo.

Em 2006, o plano de produção passou a ser executado com planejamento anual, mês a mês, de forma integrada. Isto levou a um modelo contendo 2.124 variáveis e 7.704 restrições para o planejamento de 21 grupos de produtos na expedição. A limitação do Solver original do Excel com relação ao número total de variáveis e de restrições, levou à utilização do Solver V3.5 da Fontline Systems. O tempo de processamento de modelo anual com 12 períodos de planejamento era de 17 minutos utilizando um computador desktop com Windows XP, um processador de 2.0 GHz e 1.47 GB de RAM.

Em 2008, com a implementação da modelagem utilizando a rotina Ipsolve, objeto deste trabalho, o Plano Produção e Vendas (PPV) passou a ser executado com 28 grupos de produtos na expedição em 20 equipamentos e seus respectivos estoques o que resultou na utilização de 2.328 variáveis e 8.280 restrições. O tempo de processamento deste modelo anual foi de, em média, 40 segundos, utilizando um computador desktop com Windows XP, um processador de 2.0 GHz e 1.47 GB de RAM.

Outro resultado, não menos importante, do modelo proposto é com relação ao seu desempenho computacional. O modelo foi testado com diversos tamanhos de planejamento, aumentando-se o número de meses de planejamento e consequentemente o número de variáveis.

As informações de produtividade, rendimento físico, índice de funcionamento foram baseadas em dados reais, porém modelos com mais de 12 períodos não são utilizados pelo planejamento da empresa. Ou seja, as instâncias usadas foram fictícias,



porém foram baseadas em dados reais. Esses modelos foram montados com a finalidade de testar a robustez e o tempo de resposta da ferramenta.

Utilizou-se neste experimento um computador desktop com Windows XP, processador de 2.0 GHz e 1.47 GB de RAM.

A Figura 5.24 mostra o número de iterações necessárias para resolver os problemas, em função da quantidade de variáveis.

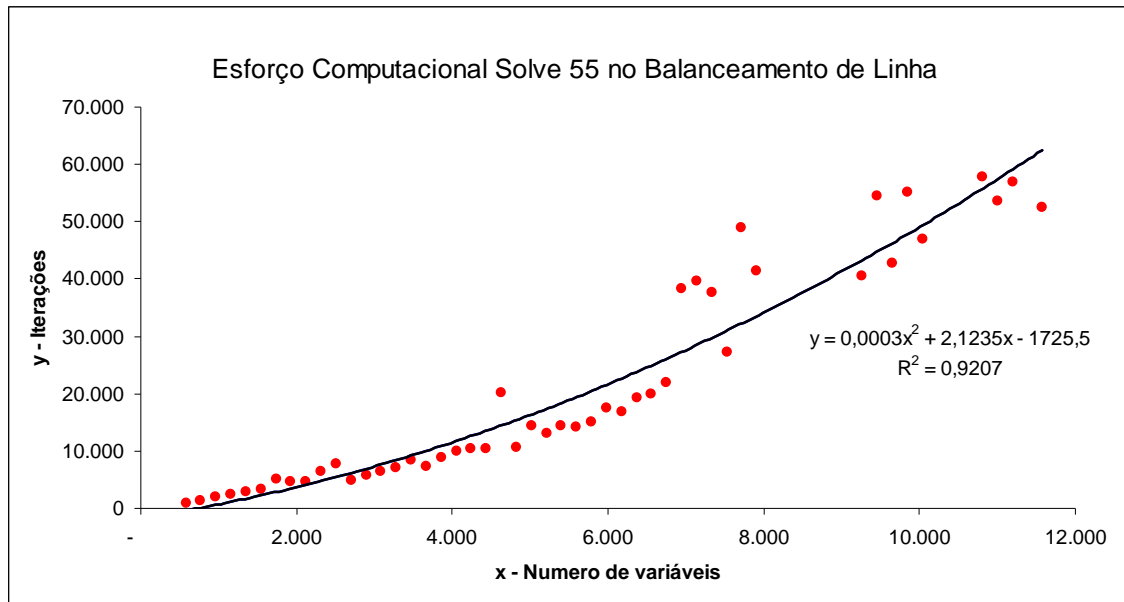


Figura 5.22 Desempenho do modelo em Ipsolve.

O tempo de processamento foi de segundos para planejamentos com 582 variáveis e 2.070 restrições e de 26 minutos para planejamentos com 11.640 variáveis e 41.400 restrições.

Os resultados mostram ser possível aumentar o número de produtos no Plano de Produção e Vendas (PPV) caso seja necessário maior detalhamento do mesmo.

Para o procedimento de desagregação de tipo de aço e de estoques será necessário uma análise de custo e benefício entre o ganho de se detalhar o plano e o acréscimo no tempo de execução.

## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho apresentou-se uma metodologia para o balanceamento de linha de produção aplicada na elaboração do Plano de Produção e Vendas (PPV) da indústria siderúrgica ArcelorMittal Inox Brasil. Essa empresa possui uma capacidade produtiva limitada e uma carteira de produtos com margens de contribuição variadas, que deve ser distribuída em vários períodos.

O modelo desenvolvido considerou os diversos parâmetros operacionais e demandas. Considerou-se também a existência de estoques em todas as fases de produção, incluindo-se o custo financeiro de se manter esses estoques de um período a outro. Os produtos foram tratados de forma agregada tanto na demanda quanto na linha de produção.

A abordagem determinística do plano, utilizando programação linear, mostrou-se bastante eficiente na implementação do modelo em planilha eletrônica com a biblioteca Ipsolve de forma compacta e com grande facilidade de operacionalização. Esse modelo, envolvendo 2.328 variáveis e 8.280 restrições, resulta em uma matriz de coeficientes altamente esparsa (1% de elementos não nulos). O tempo de processamento foi de 40 segundos, utilizando um computador desktop com Windows XP, um processador de 2.0 GHz e 1.47 GB de RAM.

A eficácia do modelo proposto é comprovada com a utilização dessa nova abordagem na elaboração do Plano de Produção e Vendas na ArcelorMittal Inox Brasil em 2008 e 2009.

A filosofia proposta pelo trabalho foi desenvolver uma ferramenta de simples manipulação e manutenção, com facilidade de divulgação e boa portabilidade. Outra característica é a flexibilidade do modelo para acompanhar a dinâmica imposta pelo ambiente de planejamento.

Em alguns equipamentos da linha produtiva, os parâmetros operacionais, tais como índice de funcionamento, produtividade e rendimento, são impactados pelo mix e volume de produção. O mix e volume de produção, por sua vez, só são conhecidos após a execução do modelo. A sugestão é desenvolver rotina recursiva de otimização e

simulação que minimize o erro dos parâmetros, aumentando a aderência do modelo à realidade.

Outra sugestão de pesquisa é a implementação da modelagem mista e com variáveis semi-contínuas, conforme descrito no item 1.6 Limitação do trabalho. A programação mista (programação linear com algumas variáveis inteiras) se deve ao fato de que a aciaria trabalha com peso de corrida múltiplo da capacidade da panela (80 t). O equipamento, que necessita de uma campanha mínima de produto para viabilizar o processamento, terá a variável quantidade produzida com valor zero ou maior que o mínimo. Essa variável é considerada semi-contínua.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFFONSO NETO, A.; **Formulação Estratégica**. Brasília: Universidade de Brasília, 2006.

AMEN M.; **Cost-oriented assembly line balancing: Model formulations, solution difficulty, upper and lower bounds**. European Journal of Operational Research, v. 168, p. 747-770, Elsevier, 2006.

BARBOSA, C. E. M.; COSTA, H. F.; MOREIRA Jr, J. C., RIBEIRO, L. C. E.; CAFÉ, R. D. M. – **Sistema de Planejamento Integrado de Vendas e Produção**, XXVII Simpósio Semestral da Acesita, Maio 1984.

BAZARAA, M. S.; **Linear Programming and Network Flows**. John Wiley & Sons, 1990.

BECKER, C.; SCHOLL, A. **A survey on problems and methods in generalized assembly line balancing**. European Journal of Operational Research, v. 168, n. 3, p. 694-715, 2006.

BOCK, S.; ROSENBERG, O.; VAN BRACKEL, T. **Controlling mixed-model assembly lines in real-time by using distributed systems**. European Journal of Operational Research, v. 168, n. 3, p. 880-904, 2006.

BUKCHIN, J.; DAR-EL, E. M.; RUBINOVITZ, J. **Mixed model assembly line design in a make-to-order environment**. Computers & Industrial Engineering, v. 41, n. 4, p. 405-421, 2002.

\_\_\_\_\_.; RABINOWITCH, I.; **A Branch-and-bound Based Solution Approach for the Mixed-model Assembly Line-balancing Problem for Minimizing Stations and Task Duplication Costs**. European Journal of Operational Research, v. 174, p. 492-508, 2006.

BUTTREY, S. E.; **Calling the Ipsolve Linear Program Software from R, S-Plus and Excel**. Journal of Statistical Software v. 14, n. 4, 2005.

CHEN, M.; WANG, W. **A linear programming model for integrated steel production and distribution planning**. International Journal Of Operations & Production Management, v..17, p. 592-610, 1997.

COROMINAS, A.; PASTOR, R. ; PLANS, J.; **Balancing Assembly Line with Skilled and Unskilled Workers**. The International Journal of Management Science, 2006.

DANTZIG, G. B. **Linear Programming and Extensions**, 1. ed., Princeton University Press, Princeton. New Jersey, 1963.

DONATO, F. A. S.; MAYERLE, S. F.; FIGUEIREDO, J. N. **Um modelo de planejamento agregado da produção para otimizar o mix de produtos e clientes em uma indústria metal-mecânica.** Simpósio de Administração da Produção, Logística e Operações Internacionais, 2008.

DUBOIS, A.; KULPA, L.; SOUZA, L. E. **Gestão de Custos e formação de preços**, 2. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

DUBOIS, F. L., OLIFF, M. D. **Aggregate Production Planning in Practice**, Production and Inventory Management Journal, v. 32, p. 26-30, 1991.

EREL, E.; SARIN, S. C. **A survey of the assembly line balancing procedures.** Production Planning & Control, Plymouth, v. 9, n. 5, p. 414-434, 1998.

FERNANDES, F. C. F.; GODINHO, M.; CUTIGI, R. A.; GUIGUET, A. M. O uso da programação inteira 0-1 para o balanceamento de linhas de montagem: modelagem, estudos de casos e avaliação. Produção, v. 18, n. 2, São Paulo, 2008.

FOKKERT, J. I. Z.; KOK, T. G; **The Mixed and Multi Model Line Balancing Problem: a Coparison.** European Journal of Operational Research, v. 100, p. 399-412,1997.

GERHARDT, M. P.; FOGLIATTO, F. S.; CORTIMIGLIA, M. N. Metodologia para o balanceamento de linhas de montagem multi-modelo em ambientes de customização em massa. Gestão & Produção, v. 14, n. 2, São Carlos, 2007.

GOKCEN, H.; EREL E.; A Goal Programming Approach to Mixed-model Assembly Line Balancing Problem. International Journal of Production Economics, v.l 48, p. 177-185, 1997.

\_\_\_\_\_.; \_\_\_\_\_.; Binary Integer Formulation for Mixed-Model Assembly Line Balancing Problem. Computers Industrial Engineering, v. 34, n. 2, p. 451-461,1998.

\_\_\_\_\_.; \_\_\_\_\_.; **Shortest-route formulation of mixed-model assembly line balancing problem.** European Journal of Operational Research, London, v. 116, n. 1, p. 194-204, 1999.

GOLDBARG, MARCO CESAR; LUNA, HENRIQUE PACCA. **Otimização Combinatória e Programação Linear**, 2.ed.- Elsevier. Rio de Janeiro, 2005.

HADDAD, R. B. B; CARVALHO M. F. H; SILVA D. C. **O uso de planilhas no planejamento da produção.** Simpoi, Campinas, 2007.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN G. J., **Introdução à Pesquisa Operacional.** McGraw-Hill, 8.ed. São Paulo, 2006.

HIMMELBLAU, D.M.; EDGAR, T. F. **Optimization of Chemical Processes**. McGraw-Hill, 1. ed., 1988.

KARABATI, S.; SAYIN, S. **Assembly line balancing in a mixed model sequencing environment with synchronous transfer**. European Journal of Operational Research, v. 149, n. 2, p. 417-429, 2003.

KARMARKAR, N.; **A New Polynomial–Time Algorithm for Linear Programming Combinatoria**, n. 4, p. 373-395, 1984.

KIM, Y. K., KIM, S. J.; KIM, J. Y. **Balancing and sequencing mixed model U-lines with a co-evolutionary algorithm**. Production Planning & Control, v. 11, n. 8, p. 754-764, 2000.

LACHTERMACHER, G. Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões, 3ª Ed., Elsevier, Rio de Janeiro, 2007.

LEHMAN, M. **On criteria for assigning models to assembly lines**. International Journal of Production Research, v. 7, n. 4, p. 269-285, 1969.

LEVITIN, GREGORY; RUBINOVITZ, JACOB; SHNITS, BORIS; **A genetic algorithm for robotic assembly line balancing**. European Journal of Operational Research, n. 168, p. 811–825, 2006

LINS, M. P. E.; CALÔBA, G. M., **Programação Linear: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho**, 1ª Ed., Interciência. Rio de Janeiro, 2006.

MARTINS, PETRÔNIO G.; LAUGENI, Fernando Piero. **Administração da Produção**. 2. ed.. São Paulo: Saraiva, 2005.

McMULLEN, P. R.; FRAZIER, G. V. **A heuristic for solving mixed-model line balancing problems with stochastic task durations and parallel stations**. International Journal of Production Economics, n. 51, p. 177-190, 1997.

\_\_\_\_\_.; TARASEWICH, P. **Using ant techniques to solve the assembly line balancing problem**. IIE Transactions, v. 35, n. 7, p. 605-617, 2003.

MOREIRA Jr, JOSÉ CECILIO. **Programação Linear no planejamento agregado de produção e vendas de uma indústria siderúrgica**, 77f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – UFMG, Belo Horizonte, 2009.

MOURÃO, MARCELO BREDÁ; YOKOJI, Akira; MALYNOWSKYJ, Antônio; LEANDRO, César A. S.; TAKANO, Cyro; QUITES, Eduardo E. C.; GENTILE, Erberto F.; SILVA, Guilherme F. B. L.; BOLOTA, José R.; GONÇALVES, Marcelo; FACO, Rubens J. **Introdução à Siderurgia**. 1. ed. São Paulo: Associação Brasileira de Metalurgia e Materiais, 2007.

NICOSIA, G.; PACCIARELLI, D.; PACIFICI, A.; **Optmally Balancing Assembly Lines with Different Workstations**. Discrete Applied Mathematics, v.1 118, p. 99-113, 2002.

PASTOR, R. et al. **Tabu search algorithms for an industrial multi-product and multi-objective assembly line balancing problem, with reduction of the task dispersion**. Journal of the Operational Research Society, v. 53, n. 12, p. 1317-1323, 2002.

PATTERSON, J. H.; ALBRACHT, J. J. **Assembly-line balancing: zero-one programming with Fibonacci search**. Journal of the Operational Research Society, v. 23, p. 166-172, 1975.

SARKER, B. R.; PAN, H. **Designing a mix-model assembly line to minimize the costs of idle and utility times**. Computers & Industrial Engineering, v. 34, n. 3, p. 609-628, 1998.

SILVA, C. T. L.; ARENALES, M. N.; **Métodos tipo dual simplex para problemas de otimização linear canalizados e esparsos**. Pesquisa Operacional, v. 27, n. 3, p. 457-486, Setembro a Dezembro de 2007.

SLACK, NIGEL; CHAMBERS, STUART; JOHNSTON, ROBERT; **Administração da Produção**. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

SOARES, A.S.; LANA, A.B.; MELO, B.A.; GOMES, C.T.; NASCIMENTO, G.M.M.; SILVA, I.N.; VIDAL, J.D.M.; CALDEIRA, J.C.C; SANTIAGO, M.C.; CARDI, P.R.C.; PANDOLF, V.A. **Metodologia e Cálculo do Indicador OEE – Índice de Eficiência Global – para os Principais Equipamentos da Acesita**, ABM 2005.

SONG, B.L.; WONG, W.K.; FAN, J.T.; CHAN. S.F.; **A recursive operator allocation approach for assembly line-balancing optimization problem with the consideration of operator efficiency**. Computers & Industrial Engineering, v. 51 p. 585–608, 2006.

SOUSA, R.S.; SILVA, C.T.L.; ARENALES, M.N.; **Métodos tipo dual simplex para problemas de otimização linear canalizados**. Pesquisa Operacional, v. 25, n. 3, p. 349-382, 2005.

SPRECHER, A. **Dynamic search tree decomposition for balancing assembly lines by parallel search**. International Journal of Production Research, v. 41, n. 7, pp. 1413-1430, 2003.

SUZUKI, T.; **TPM in process industries**, Productivity Press, 1994.

TAHA, HAMDY A. **Pesquisa Operacional**. 8. ed. São Paulo: Person Prentice Hall, 2008.

VILARINHO, P.; SIMARIA, A. S. **A two-stage heuristic method for balancing mixed-model assembly lines with parallel workstations**. International Journal of Production Research, Vol. 40, No 6, pp 1405-1420, 2002.

VOLLMANN, T. E.; BERRY, W. L.; WHYBAK, D. C.; JACOBS, F. R.; **Sistemas de Planejamento e Controle da Produção para o Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos**, 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

WAGNER, H. M. **Pesquisa Operacional**, Tradução da segunda edição americana, Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986.



## APÊNDICE A – ESTRUTURA DO OTIMIZADOR

A planilha foi estruturada de tal forma a permitir que o usuário possa alterar, incluir, excluir restrições, variáveis direto na planilha excel. Ficando o modelo matemático transparente ao usuário.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1	<b>Função Objetivo: Maximizar Lucro</b>		<b>BALANCEAMENTO DE LINHA</b>													
			395,0 MR\$ / ano				283,6 kt / ano				PL Anual	PL Mês a Mês	Zerar Variáveis			
2	<b>Solução Ótima Encontrada</b>		Estoque Inicial	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>5</sub>	M <sub>6</sub>	M <sub>7</sub>	M <sub>8</sub>	M <sub>9</sub>	M <sub>10</sub>	M <sub>11</sub>	M <sub>12</sub>	
3	E <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	21.393	19.170	-	17.249	14.396	15.977	-	19.110	10.651	18.110	14.396	5.326		
4		P <sub>2</sub>	15.401	-	23.957	17.824	4.034	14.803	19.385	15.010	23.399	18.175	4.034	11.396		
5		Total (t)	36.794	19.170	23.957	35.072	18.430	30.781	19.385	34.120	34.050	36.286	18.430	16.722		
6		Ocupação (h)	744	360	532	720	360	629	431	692	720	744	360	353		
7	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	-	4.299	0	0	3.000	0	0	0	0	3.000	0	0		
8		P <sub>2</sub>	-	981	0	4.572	5.000	0	0	0	3.614	4.221	5.000	0		
9		Total (t)	-	5.280	0	4.572	8.000	0	0	0	3.614	4.221	8.000	0		
10	E <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	16.667	22.883	-	13.893	16.961	15.578	0	18.633	10.385	14.733	16.961	5.193		
11		P <sub>2</sub>	14.060	956	18.900	16.961	8.808	14.433	18.900	11.111	22.222	16.961	8.808	11.111		
12		Total (t)	30.727	23.839	18.900	30.854	25.770	30.011	18.900	29.744	32.607	31.694	25.770	16.304		
13		Ocupação (h)	744	872	360	720	652	720	360	744	720	744	652	360		
14	Produto Acabado	P <sub>1</sub>	-	0	660	0	0	5.850	0	0	0	0	5.850	0		
15		P <sub>2</sub>	-	0	0	0	5.850	0	3.322	0	0	0	5.850	0		
16		Total (t)	-	0	660	0	5.850	5.850	3.322	0	0	0	5.850	5.850		
17	À Produzir	P <sub>1</sub>	15.000	20.000	594	12.503	10.000	19.285	-	16.769	9.347	13.259	10.000	9.938		
18		P <sub>2</sub>	12.654	860	17.010	10.000	13.193	10.000	20.000	10.000	20.000	10.000	13.193	10.000		
19		Total (t)	27.654	20.860	17.604	22.503	23.193	29.285	20.000	26.769	29.347	23.259	23.193	19.938		

Figura A.01 Planilha de interface do modelo matemático do Plano de Produção.

O modelo matemático é lido na faixa de células compreendido entre a coluna \$D até a coluna \$O e da linha \$7 até a linha do total à produzir (Figura A.01).

O conteúdo de cada célula é definido pelo formato da fórmula de cada célula. A saber: As células que iniciam com a palavra chave ‘=soma’ são interpretadas como restrição de total de produção por equipamento. As células com a palavra chave ‘=somarproduto’ são restrições de ocupação do equipamento. E as células com a palavra chave ‘=’ são as restrições de estoques intermediários. São estas restrições que fazem a ligação do produto de um equipamento a outro no fluxo produtivo.

As células, dentro desta faixa acima citada, que não contenham fórmula, ou seja, o seu conteúdo é um valor numérico ou branco, são interpretadas como variáveis para o modelo em questão. Os valores poderão ser alterados para efeito de simulação mas serão atualizados com o resultado da otimização.

Cada conjunto destes acima citados é armazenado em vetores separadas contendo também a linha correspondente na planilha Excel® e o número de elementos de cada conjunto.

O número de variáveis será o total de células na faixa com valor numérico ou em branco multiplicado pelo número de meses do planejamento (12 meses). O número de restrições será o número total de linhas dentro da faixa de leitura multiplicado pelo número de meses do planejamento (12 meses) e multiplicado por 2, pois cada linha contém uma restrição de mínimo e outra de máximo.

Para definir a estrutura do modelo, é necessário o conhecimento prévio do número de variáveis do modelo. O comando para gerar um novo modelo em Ipsolve é:

```
lp = Ipsolve.make_lp(0, Ncol)
```

em que Ncol é o número de colunas que corresponde ao número de variáveis do modelo.

É sugerido que as restrições sejam adicionadas linha a linha. Segundo o manual isso aumenta a velocidade na construção do modelo. O comando que habilita esta facilidade é:

```
Ipsolve.set_add_rowmode lp, True
```

As variáveis do modelo serão a produção de cada equipamento no fluxo produtivo em cada mês e a quantidade entregue ao cliente de cada produto distribuído também por meses. Estas variáveis possuem limite inferior e limite superior para os valores que podem assumir. O limite inferior, quando não há uma restrição em particular para a variável, será zero. Isso garante que quantidades negativas não sejam aceitas pelo modelo.

A seguir, apresenta-se a subrotina para o modelamento:

```
Sub LP_Anual()
```

```
  Inicia_Contadores
```

```
  Dimensiona_Modelo
```

```
  Inicia_Ipsolve
```

```
  Inclui_Restricoes
```

```
  Inclui_FuncaoObjetivo
```

```
  Resolve_Simplex
```

```

Retorna_Solucao
Finaliza_lpsolve
End Sub

```

Alguns comandos da biblioteca lpsolve utilizados na rotina de otimização:

```

lpsolve.Init "."
lpsolve.make_lp(0, Ncol)
lpsolve.set_add_rowmode lp, True
lpsolve.add_constraintex(lp, NColNZero, row(j)), colno(0), LE, limite) = False
lpsolve.set_add_rowmode lp, False
lpsolve.set_obj_fnex(lp, Ncol, row(0), colno(0)) = False Then
lpsolve.set_maxim lp
lpsolve.write_lp lp, "modelAnual2P2E.lp"
NaoZero = .get_nonzeros(lp)
ret = .solve(lp)
NumIteracoes = .get_total_iter(lp)
If .get_variables(lp, row(0)) = True And ret = OPTIMAL Then
If ret = OPTIMAL Then
    Mensagem = "Solução Ótima Encontrada"
Else
    Mensagem = "Solução NÃO Encontrada"
End If
Otimo = lpsolve.get_objective(lp)
lpsolve.delete_lp lp
Set lpsolve = Nothing

```

## APÊNDICE B – LPSOLVE 5.5

O Ipsolve é um pacote baseado no método simplex revisado para resolver problemas de Programação linear, Inteira ou Mista. É um software de licença pública. Esse pacote, segundo o manual, não tem nenhum limite com relação a tamanho do modelo e aceita como entrada os arquivos no padrão **lp** ou **mps**.

O aplicativo Ipsolve é escrito em ANSI C e pode ser compilado em plataformas como linux e Windows e também pode ser chamado como uma biblioteca em diferentes linguagens tais como: como C, VB, .NET, Arena, Delphi, Excel, Java. Ou qualquer linguagem de programação capaz de chamar bibliotecas dinâmicas externas (DLL).

O Ipsolve possui uma comunidade via o grupo de Yahoo com os programas fonte mais recente, executáveis para as plataformas mais comuns, exemplos, manuais e um quadro de avisos onde as pessoas podem compartilhar os conhecimentos de otimização e de Ipsolve ([http://groups.yahoo.com/group/lp\\_solve](http://groups.yahoo.com/group/lp_solve)).

O Ipsolve foi originalmente desenvolvido por Michel Berkelaar da Eindhoven University of Technology. A versão mais recente (versão 5) foi implementada por Kjell Eikland e Peter Notebaert e contou com a ajuda de várias pessoas para melhorar o produto. Por exemplo, a nova interface de Java para Ipsolve foi feita por Juergen Ebert.

A versão 5 traz várias melhorias em relação as versões anteriores. Essa melhoria contínua da rotina resulta no tempo de solução é mais rápido, mais estabilidade e capacidade para resolver modelos maiores e novas funcionalidades.

Basicamente, o Ipsolve é uma biblioteca, um conjunto de rotinas, chamado API que pode ser chamada de quase qualquer linguagem de programação para resolver problemas programação linear ou inteira. API, de Application Programming Interface (ou Interface de Programação de Aplicativos) é um conjunto de rotinas e padrões estabelecidos por um software para a utilização das suas funcionalidades por programas aplicativos.

Existem vários caminhos para passar os dados para a biblioteca: via API, via arquivos de entrada ou via IDE.

A API é um conjunto de rotinas que podem ser chamadas de uma linguagem de programação para construir o modelo na memória, processa e retorna os resultados. Existem muitas rotinas de API para resolver diversas tarefas e configurar várias opções do modelo. O padrão Ipsolve suporta vários tipos de arquivos de entrada. O formato MPS é suportado pela maioria dos otimizadores, mas não é muito amigável. Outro formato muito utilizado é o formato LP. Esse formato é mais legível e se assemelha muito com o formato de modelo matemático descrito na forma algébrica.

Existem também programas controladores para chamar o Ipsolve que usa a API para resolver modelos através de linha comandos. Com esses aplicativos não é necessário desenvolver nenhum código de programação, basta fornecer o modelo na forma algébrica e executar a otimização.

Henri Gourvest desenvolveu um programa de IDE (Integrated Development Environment ou ambiente integrado para desenvolvimento) chamado de LPSolve. Esse aplicativo usa a API Lpsolve para editar e resolver modelos matemáticos.

### **Características do Ipsolve:**

- Resolve diversos tipos de programação matemática, tais como: Programação Linear, Programação Inteira ou Programação Mista (Programação Linear com algumas variáveis Inteiras);
- Sem limite com relação ao tamanho de modelo;
- A licença é livre e disponibiliza os fontes;
- Suporta variáveis inteiro, semi contínuas e Especial Ordenado;
- Pode ler modelo nos formatos MPS ou LP;
- Os modelos podem ser construídos e executados na memória, sem o uso de arquivos;
- Tem uma interface de API poderosa
- Fácil utilização em outras linguagens de programação
- Avançada avaliação rotina de busca para os algoritmos simplex primal e dual;
- Possui diferentes métodos de ajuste de escala para garantir mais estabilidade numérica do modelo;

- Possui rotinas de pré-processamento para reduzir as restrições do modelo e torná-lo mais leve e assim agilizar o processamento;
- Possui rotina para determinar a melhor solução básica para iniciar o processamento;
- Permite reiniciar processamento após mudanças no modelo. Pode continuar partindo da última solução encontrada;
- É possível selecionar as combinações de primal e dual fase 1 e 2;
- É possível configurar vários parâmetros de solução como tolerâncias;
- É provido de bibliotecas com alternativas (mais rápidas) para inversão e fatoração de matrizes;
- Tem a possibilidade para converter um formato de modelo outro para formato;
- Possui rotinas para a análise de sensibilidade após a otimização.

### Exemplo de modelagem utilizando Ipsolve

Suponha o seguinte problema de programação linear no formato matemático:

Maximize  $z = 143x + 60y$

Sujeito a

$120x + 210y \leq 15000$

$110x + 30y \leq 4000$

$x + y \leq 75$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

### Arquivo no formato lp

O formato lp é o formato padrão do Ipsolve para resolver problemas de programação linear via um ARQUIVO ASCII. A sintaxe é bem parecida para a formulação Matemática (forma algébrica). O modelo anterior pode ser formulado no formato LP da seguinte forma:

```
/* model.lp */
```

```
max: 143 x + 60 y;
```

```
120 x + 210 y <= 15000;
```

```
110 x + 30 y <= 4000;
```

```
x + y <= 75;
```

### **Construção do modelo via Linguagem de Programação Matemática.**

Existem vários aplicativos de programação matemática, comerciais ou grátis, que podem ser usados para resolver problemas de programação. É fornecido um *drive* lpsolve para diversas linguagens: AMPL, MATLAB, O-Matrix, Scilab, Octave, Python.

### **Construção do modelo de um Linguagem de Programação.**

Em vários casos é exigido que o solver seja chamado no código da linguagem de programação em que está construído o aplicativo. Os dados são tratados na memória sem a necessidade de criação de arquivos. O modelo é construído e processado utilizando a uma biblioteca lpsolve. Esta biblioteca é chamada da linguagem de programação. O exemplo anterior será formulado na linguagens de programação Visual Basic (VB):

```
Option Explicit

'Exemplo de código VB utilizando a biblioteca lpsolve
Private lpsolve As lpsolve55

Sub Main()

    Set lpsolve = New lpsolve55

    lpsolve.Init "."

    Otimizar

    Set lpsolve = Nothing

End Sub

Private Function Otimizar() As Integer
    Dim lp As Long
    Dim Ncol As Long, colno() As Long
    Dim j As Integer, ret As Integer
    Dim row() As Double
```

```

With lpsolve
  ' O modelo será construído linha a linha
  ' Para iniciar será criado um modelo com 0 linhas e 2
  ' colunas
  Ncol = 2 ' O número de colunas corresponde ao número
           ' de variáveis
  lp = .make_lp(0, Ncol)
  If lp = 0 Then
    ret = 1 ' O novo modelo não pode ser construído...
  End If

  If ret = 0 Then
    ' as variáveis pode ser nomeadas. Não é
    ' obrigatório, mas auxilia na depuração do modelo.
    .set_col_name lp, 1, "x"
    .set_col_name lp, 2, "y"
    ' Cria espaço suficiente para uma linha.
    ReDim colno(0 To Ncol - 1)
    ReDim row(0 To Ncol - 1)
  End If

  If ret = 0 Then
    .set_add_rowmode lp, True
    ' A construção do modelo pode ser agilizado quando
    ' feito linha a linha. Construindo a primeira
    ' linha (120 x + 210 y <= 15000)
    j = 0

    colno(j) = 1 ' primeira coluna
    row(j) = 120
    j = j + 1

    colno(j) = 2 ' segunda coluna
    row(j) = 210
    j = j + 1

    ' adicionando a primeira linha de restrição
    If .add_constraintex(lp, j, row(0), colno(0), LE,
        15000) = False Then
      ret = 3
    End If
  End If

  If ret = 0 Then
    ' Construindo a segunda linha (110 x + 30 y <=
    ' 4000)
    j = 0

```



```

colno(j) = 1 ' primeira coluna
row(j) = 110
j = j + 1

colno(j) = 2 ' segunda coluna
row(j) = 30
j = j + 1

' adicionando a segunda linha de restrição
  If .add_constraintex(lp, j, row(0), colno(0),
    LE, 4000) = False Then
    ret = 3
  End If
End If

If ret = 0 Then
  ' Construindo a terceira linha (x + y <= 75)
  j = 0

  colno(j) = 1 ' primeira coluna
  row(j) = 1
  j = j + 1

  colno(j) = 2 ' segunda coluna
  row(j) = 1
  j = j + 1

  ' adicionando a terceira linha de restrição
  If .add_constraintex(lp, j, row(0), colno(0), LE,
    75) = False Then
    ret = 3
  End If
End If

If ret = 0 Then
  .set_add_rowmode lp, False

  ' Modelando a função objetivo (143 x + 60 y)
  j = 0

  colno(j) = 1 ' Primeira coluna
  row(j) = 143
  j = j + 1

  colno(j) = 2 ' segunda coluna
  row(j) = 60

```

```

j = j + 1

' adicionando a função objetivo no modelo
If .set_obj_fnex(lp, j, row(0), colno(0)) = False
    Then
        ret = 4
    End If
End If

If ret = 0 Then
    ' Definição da otimização (maximizar ou minimizar)
    .set_maxim lp

    ' O modelo é escrito no arquivo "model.lp" para
    ' documentação ou futura utilização em outra
    ' rotina. Não é necessário gravar o modelo, pois o
    ' que será executado já está na memória.

    .write_lp lp, "model.lp"

    ' Lista as mensagens enquanto está processando
    .set_verbos lp, 3

    ' Agora o lpsolve calcula a solução

ret = .solve(lp)

    If ret = OPTIMAL Then
        ret = 0
    Else
        ret = 5
    End If
End If

If ret = 0 Then
    ' após calculado, pode-se mostrar os resultados

    ' valor da função objetivo
    Debug.Print "Função Objetivo: " &
        .get_objective(lp)

    ' Valores da variáveis
    .get_variables lp, row(0)
    For j = 1 To Ncol
        Debug.Print .get_col_name(lp, j) & ": " &
            row(j - 1)
    Next

```

```

End If

' libera a memória alocada
Erase row
Erase colno

If lp <> 0 Then
    .delete_lp lp
End If

Otimizar = ret
End With

End Function

```

Após executado, tem-se o seguinte resultado na tela:

```

Função Objetivo: 6315.625
x: 21.875
y: 53.125

```

O arquivo model.lp é criado com o seguinte conteúdo:

```

/* Função objetivo */
max: +143 x +60 y;

/* Restrições */
+120 x +210 y <= 15000;
+110 x +30 y <= 4000;
+x +y <= 75;

```

Esse arquivo pode ser lido e é executado por outras rotinas sem a necessidade de reconstrução. É possível trocar parâmetros utilizando-se de comandos específicos da API.

A classe `Ipsolve55.cls` ou o objeto `Ipsolve55` COM necessitam estar na área de trabalho para a execução da rotina (Figura A1). Tanto a classe quando o objeto estão disponíveis na internet.

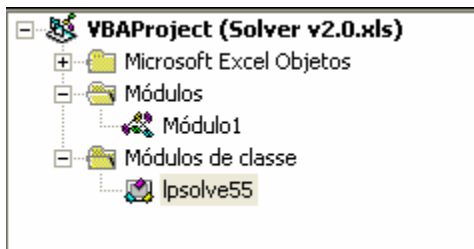


Figura A1 – Inclusão da classe Ipsolve55.cls na área de trabalho do VBA Excel.

Foi descrito aqui um exemplo muito limitado. É possível configurar limites para variáveis, faixas de restrições e definir variáveis do tipo inteiro. Pode-se conseguir melhores resultados para o modelo mudando opções e parâmetros e muito mais.

Segundo descrito do help da biblioteca Ipsolve versão 5.5, não há limites quanto ao número de variáveis e restrições do modelo matemático. O modelo da dissertação, aqui apresentado, foi processado com o máximo de 11.640 variáveis e 41.400 restrições com tempo total de processamento de 26 minutos em computador desktop com Windows XP, um processador de 2.0 GHz e 1.47 GB de RAM.

## APÊNDICE C – CONCEITOS GEOMÉTRICOS DE MODELOS LINEARES

O estudo da otimização linear requer certos conceitos e definições, que embora bem conhecido na literatura, são apresentados de forma breve nesta seção.

Como conceito elementar tem-se que matriz é uma entidade matemática representada por um arranjo dimensional de números ou tabela. Como uma entidade matemática, toda matriz atende a certas propriedades. As matrizes mais conhecidas são arranjos bidimensionais onde se denomina as  $m$  fileiras horizontais de linhas e as  $n$  verticais de colunas. Uma matriz  $A$  é denominada de *matriz quadrada* quando  $m$  é igual a  $n$ , ou seja, possui o mesmo número de linhas e de colunas.

Os elementos individuais de uma matriz são representados pela letra minúscula da matriz acompanhada dos índices que correspondem às suas coordenadas no quadro. O primeiro índice corresponde à linha e o segundo corresponde à coluna.

Genericamente:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A condição para que duas matrizes sejam passíveis de operarem em soma e subtração é que possuam a mesma dimensão, ou seja, o mesmo número de linhas e colunas.

O operador neutro na soma de matriz é a matriz nula em que todos os elementos são iguais a zero. A soma ou subtração de matrizes é efetuada operando-se elemento a elemento de cada matriz envolvida nas mesmas coordenadas  $i$  e  $j$ .

O resultado da multiplicação de uma matriz  $A$  por um número escalar (ou real)  $\lambda$ , ou seja,  $\lambda \times A$  é uma matriz em que todos os elementos de  $A$  foram multiplicados pelo valor de  $\lambda$ .

O produto de matrizes é uma das operações mais importantes da álgebra linear (GOLDBARG; LUNA, 2005). Sejam as matrizes  $A = [a_{ij}]$ ;  $B = [c_{ij}]$ ;  $C = [c_{ij}]$ ; e sabendo

que  $C = A \times B$ . Então podemos obter os elementos de  $C$ , os seus  $c_{ij}$ , por meio da seguinte regra:

O elemento  $i, j$  da matriz produto será a soma dos produtos dos elementos correspondentes da linha  $i$  da primeira matriz, pelos elementos da coluna  $j$  da segunda matriz, ou seja:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \times b_{pj}$$

A operação de produto de matrizes só poderá ocorrer quando o número de colunas da primeira matriz ( $A$ ) for igual ao número de linhas da segunda ( $B$ ). A matriz  $C$  resultante possuirá o número de linhas da primeira matriz ( $A$ ) e o número de colunas da segunda matriz ( $B$ ). O operador neutro no produto de matrizes é chamado de matriz identidade ( $I$ ) e seus elementos são:

$$\begin{aligned} i_{ij} &= 1 & \text{se } i &= j \\ i_{ij} &= 0 & \text{se } i &\neq j \end{aligned}$$

Se  $A \times B = B \times A$ , tem-se que  $A$  e  $B$  são matrizes comutativas; porém esta é relação rara de acontecer (GOLDBARG; LUNA, 2005). Se  $A \times C = A \times B$ , não se pode afirmar que  $C = B$ . E ser  $A$  for uma matriz quadrada então  $A \times I = I \times A$ .

Outra característica importante na multiplicação de matrizes é que o produto de duas matrizes **não nulas** pode ser uma matriz **nula**.

A transposta da matriz  $A$  ( $A^t$ ) é obtida trocando as linhas da matriz  $A$  por suas colunas e vice-versa. Assim  $A_{s \times p} \Rightarrow A^t_{p \times s}$  e possui as seguintes propriedades:

1.  $(kA)^t = k(A)^t$ , para todo número escalar  $k$
2.  $(A \times B)^t = (B)^t \times (A)^t$
3.  $((A)^t)^t = A$
4.  $(A + B)^t = (A)^t + (B)^t$

A diagonal principal da matriz  $A$  é o conjunto dos elementos  $a_{ij}$  com  $i = j$ . Essa diagonal divide a matriz em duas partes: banda superior e banda inferior. Quando uma matriz apresenta a banda superior ou inferior composta unicamente por zeros e a

diagonal principal composta por uns, tem-se a matriz escalonada à direita ou à esquerda.

O determinante da matriz  $A$  ( $\det A$ ) é um valor escalar, ou seja, um número real e pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1}$$

onde  $A_{i1}$  é o cofator de  $a_{i1}$  definido pelo produto de  $(-1)^{i+1}$  com o determinante de uma submatriz de  $A$ , obtida com a retirada da  $i$ -ésima linha e retirada da primeira coluna de  $A$  (GOLDBARG; LUNA, 2005).

A inversa de uma matriz  $A$ , quadrada, denominada  $A^{-1}$ , é a matriz que atende a seguinte condição:

Propriedade básica das matrizes inversas:

$$A \times A^{-1} = I = A^{-1} \times A$$

outras propriedades:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(I^{-1})^{-1} = I$$

$$(k \times A)^{-1} = k^{-1} \times A^{-1}$$

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

$$(A \times B \times C)^{-1} = C^{-1} \times B^{-1} \times A^{-1}$$

Nem todas as matrizes quadradas possuem inversa. Quando uma matriz atende a propriedade básica e possui uma inversa, ela é dita *não singular*, caso contrário a matriz é denominada *singular*. A condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada seja *não singular* é que seu determinante seja diferente de zero ( $\det A \neq 0$ ). Nesse caso, as linhas que compõem a matriz  $A$  são *linearmente independentes*.

A inversão de matriz pode ser realizada: aplicando estratégias baseadas na definição da inversa de  $A$ ; utilizando os determinantes ou por meio de operações elementares. O método básico de inversão via operações elementares dará suporte à ação do algoritmo simplex na próxima seção.

Seja a equação matricial:

$$Ax = B$$

Utilizando a operação de multiplicação de matrizes, tem-se que não se altera  $Ax = B$  quando um dos membros é multiplicado pela matriz identidade, assim :

$$Ax = IB$$

é equivalente a  $Ax = B$ .

O processo de solução de  $Ax = B$  diz que:

$$x = A^{-1}B$$

ou, pelo mesmo raciocínio anterior,

$$Ix = A^{-1}B$$

Comparando as equações acima, observa-se que o processo de inversão de matrizes pode ser pensado como um processo de transformação de uma matriz  $A$  qualquer em uma matriz identidade, por meio de operações que não violem as condições do sistema linear original (GOLDBARG; LUNA, 2005). Tendo em vista o exposto, pode-se imaginar um método de inversão de matriz  $A$ , por meio de operações elementares em suas linhas. Quando a matriz  $A$  for transformada em uma matriz identidade a matriz  $I$  terá acumulado o valor da matriz  $A^{-1}$ . Normalmente, no desenvolvimento de códigos para Programação Linear, é utilizado algum método avançado de análise numérica para obter a inversa como, por exemplo, a decomposição LU<sup>7</sup> (Taha, 2008).

---

<sup>7</sup> A decomposição LU é uma forma de fatoração de uma matriz não singular como produto de uma matriz triangular inferior e uma matriz triangular superior.